TECHNISCHE UNIVERSITÄT

TUHH

HAMBURG - HARBURG

kleine konstruktive Studienarbeit

# Theoretische Untersuchung der Belastbarkeit und Stabilität von Fahrradspeichenrädern unter besonderer Berücksichtigung des elastischen Kippens


vorgelegt von:

Olaf Schultz

Matr. Nr.: 1158

Bertreuer: Dipl. Ing. Eric Groß


Harburg, den 30. Mai 1996

**Zusammenfassung**

Speichenräder sind sicherheitskritische Bauteile an Fahrrädern. Ein plötzliches Versagen kann schwerwiegende Personen- und Sachschäden verursachen. Zwei Versagensmechanismen, das seitliche Ausknicken und das Abbrechen des Felgenhornes, werden hier analysiert.

Fahrradfelgen sind dünne Tragwerke, die hohen Belastungen ausgesetzt werden. Unter bestimmten Umständen verformen sie sich durch elastisches seitliches Ausweichen. Weicht ein Kreisring aus seiner Ebene aus, so spricht man von *kippen*. Die Laufräder nehmen dann eine kartoffelchipähnliche Form an. Dieser Vorgang wird allgemein mit „Achterbildung“, im Fahrradbereich auch als „chipen“, bezeichnet. Hierbei müssen die Felgen nicht unbedingt im Fahreinsatz sein. In dieser Arbeit wird die Ursache des Problemes untersucht. Dabei werden unterschiedliche Lösungsansätze verwendet. Es werden verschiedene analytische Ansätze von Knickproblemen und Finiten Elemente-Berechnungen des Problemes betrachtet.

Die Felgenflanke wird aufgrund des Schlauchinnendruckes stark belastet. Die daraus resultierenden Spannungen und die Bruchgefahr bei durchgebremsten Felgen werden näher betrachtet.

Eine theoretische Betrachtung der Kombinationsmöglichkeiten aus Speichungsart und Nabenkonstruktion stellt Schlußfolgerungen für eine optimale Laufradkonstruktion zur Diskussion.

# Nomenklatur

| Symbol | Einheit | Bedeutung |
|---|---|---|
| $\alpha$ | 1 | Zahlenfaktor für Euler |
| $\alpha$ | ° | Verdrehwinkel der Speiche in der Felge durch das Antriebsmoment |
| $\beta$ | $N/mm^2$ | Federkonstante der elastischen Bettung |
| $\delta$ | mm | Scheibendicke eines Felgenquerschnittes |
| $\varphi$ | ° | Nabenverdrehung durch das Antriebsmoment |
| $\mu$ | 1 | Querkontraktionszahl |
| $\nu$ | 1 | Sicherheit |
| $\sigma_q$ | $N/mm^2$ | Quetschspannung (Quetschgrenze) |
| $\sigma_p$ | $N/mm^2$ | Grenzspannung (Proportionalitätsgrenze) |
| $A$ | $mm^2$ | Felgenquerschnitt |
| $b$ | mm | Felgenbreite (Maulweite) |
| $b$ | mm | Antriebsmomentenwirksamer Hebelarm einer Speiche |
| $c$ | N/mm | Federsteifigkeit |
| $c_\varphi$ | N/° | Torsionsfedersteifigkeit |
| $C_M$ | $mm^6$ | Wölbwiderstand |
| $d_{Sp}$ | mm | Speichendurchmesser |
| $g$ | $m/s^2$ | Erdbeschleunigung |
| $G$ | $N/mm^2$ | Gleit- oder Schubmodul |
| $F_p$ | N | Druckkraft durch Schlauchinnenluftdruck |
| $F_{Sp}$ | N | Speichenkraft |
| $i_p$ | $mm^2$ | Trägheitsradius |
| $I_p$ | $mm^4$ | polares Flächenmoment |
| $I_t$ | $mm^4$ | Torsionsflächenmoment 2.Grades |
| $I_x$ | $mm^4$ | Flächenmoment um die x-Achse |
| $I_y$ | $mm^4$ | Flächenmoment um die y-Achse |
| $l_F$ | m | Felgenumfang |
| $l_{Fe}$ | mm | Segmentlänge |
| $l_{Ho}$ | mm | Felgenhornhöhe |
| $l_N$ | mm | Speichenlochkreisradius (Nabe) |
| $\Delta l_{Sp}$ | mm | Speichenlängung durch das Antriebsmoment |
| $l_{Sp}$ | mm | Speichenlänge |
| $M$ | Nm | Antriebsmoment |
| $n$ | 1,2,3... | Halbwellenzahl |
| $N$ | N | Normalkraft im Felgenquerschnitt |
| $p$ | bar | Luftdruck |
| $P$ | 1 | Steigung in Prozent |
| $P$ | W | Antriebsleistung |
| $R_e$ | $N/mm^2$ | Streckgrenze |
| $R_m$ | $N/mm^2$ | Zugfestigkeit |
| $R_{p0,2}$ | $N/mm^2$ | Dehngrenze |
| $t$ | mm | Felgenhorndicke |
| $U$ | J | Potentielle Energie |
| $U$ | mm | Profilumfang |
| $w$ | mm | Ausknickung der Felge |
| $Y$ | $N/mm^2$ | Elastizitätsmodul (Youngsmodul) |
| $z$ | 1 | Speichenzahl |

| Indizes | Bedeutung |
|---|---|
| 0 | ungespannte Speiche |
| 1 | gespannte Speiche |
| 2 | ausgelenkte Speiche |
| $a$ | linke Speiche |
| $A$ | axial |
| $b$ | rechte Speiche |
| $F$ | Felge |
| $Ho$ | Felgenhorn |
| $k$ | Kritische Knicklast |
| $l$ | links |
| $N$ | Nabe |
| $r$ | rechts |
| $Sp$ | Speiche |

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

## Tabellenverzeichnis

# 1 Einleitung

Fahrradfelgen werden heute in der Regel aus dünnwandigen, stranggepreßten Aluminiumprofilen hergestellt. Sie werden durch 16–48 Speichen auf einer Nabe fixiert. In Europa werden in der Regel 36 Speichen für Hinter- und Vorderräder verwendet. In Afrika und Indien werden häufig 32 Speichen vorne und 40 hinten verwendet. Einige Reiseradler verwenden vorzugsweise 40 Speichen. Weniger als 32 Speichen werden meist nur von Rennradfahrern, denen es auf geringstes Gewicht und niedrigen Luftwiderstand ankommt, verwendet.

Unter anderem wurde im nationalen elektronischen Diskussionsforum `de.rec.fahrrad` in der letzten Zeit wiederholt von Fahrradfahrern berichtet, daß ihnen Fahrradfelgen ausgekippt[1] („gechipt“[2]) seien. Dabei wurde teilweise noch nicht einmal mit dem Fahrrad gefahren, das Rad stand und war aufeinmal unbenutzbar, da sich das entsprechende Laufrad um mehrere Zentimeter verformt hatte. Umfragen bei mehreren Fahrradhändlern ergaben, daß auch diesen das Problem bekannt ist. Diese unterscheiden allerdings meist nicht zwischen einem Laufrad, das wegen innerer Spannungszustände kollabiert ist, und einem, das wegen äußerer Einwirkung[3] verformt ist.

Zwei Fälle seien hier genannt:

- Ein Radfahrer hatte sein Hinterrad (Felge Ritchey Rock 395E, 500 km Laufleistung) aufgepumpt (6 bar) und das Fahrrad dann beiseite gestellt. Als er nach einigen Stunden wiederkam, bemerkte er, daß sein Hinterrad gechipt war. Nach einem Aus- und Wiedereinspeichen war die Felge wieder verwendbar. Die Felge war nur elastisch verformt.[4]
- Ein Radfahrer fuhr mit seinem Mountainbike auf einem ebenen Radweg, als unter ihm sein Vorderrad kollabierte und an den Gabelscheiden blockierte. Der Radweg war eben, es lagen keine Gegenstände darauf und es wurde ruhig (kein Wiegetritt) gefahren.

In extremen Situationen kann die Achterbildung schon beim Einspeichen auf dem Zentrierständer auftreten.

Aus den bisherigen Schilderungen kann man schließen, daß ein Felgenversagen durch Knicken/Beulen eintrat. Aufgrund der Abstützung durch die Speichen könnte die Felge so unter Druck gesetzt werden, daß das Felgenmaterial plastisch verformt (fließt). Die dafür notwendigen Spannungen sind, wie unten nachgerechnet, jedoch allein über die Speichenkräfte und den Reifenluftdruck nicht aufbringbar. So müßte das Versagen durch elastische Knickung maßgeblich sein. Die hier ausgerechneten Knicklasten besagen, daß ab diesen Lasten ein Knicken eintreten kann, jedoch nicht, daß es unbedingt stattfindet. Die zulässige Knicklast ist häufig kleiner als die Last, die zum plastischen Verformen des Materials

[1] Bei geraden Stäben wird der Vorgang des Ausweichens aus der labilen vorgegebenen Geometrie in einen stabilen Verformungszustand i.d.R mit „knicken“, bei gebogenen Stäben das Ausweichen aus der Ebene mit „kippen“ bezeichnet.

[2] verformen der Felge zur Form eines Kartoffelchips

[3] Seitlich weggetreten, Kantstein...

[4] Briefwechsel

notwendig ist. Dabei wird von ideal fehlerfreien Felgen ausgegangen. In der Praxis sind der Felgenstoß, ungleichmäßige Speichenkräfte sowie die Nippellöcher Inhomogenitäten, die dafür sorgen, daß die Felge bei der kritischen Last (Knicklast) ausknickt.

# 2 Material

Für die Laufradbelastungen ist die Kenntnis der einzelnen Lastanteile und Geometrien notwendig. Dafür werden teilweise Vereinfachungen vorgenommen und bei den Kräften mit statischen Werten gerechnet, da die geschilderten Knickprobleme nie bei massiven Stoßbelastungen auftraten. Einige Annahmen wurden so getroffen, daß dies die oberen Belastungsgrenzen sind.[5]

## 2.1 Felgenprofile

Zur Klassifikation der Felgenquerschnitte werden folgende Kennwerte verwendet:

$$A = \int \mathrm{dA} \tag{1}$$

$$x_s = \frac{\int x \ \mathrm{dA}}{A} \tag{2}$$

$$y_s = \frac{\int y \ \mathrm{dA}}{A} \tag{3}$$

$$I_x = \int y^2 \ \mathrm{dA} \tag{4}$$

$$I_y = \int x^2 \ \mathrm{dA} \tag{5}$$

$$I_p = I_z = I_x + I_y \tag{6}$$

$$i_p = \frac{I_p}{A} \tag{7}$$

$$I_{t_{geschlossen}} = \frac{4\ A_m^2}{\oint \frac{1}{t(s)}\ \mathrm{ds}} \approx \frac{4\ A_m^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{t_i}} \tag{8}$$

$$I_{t_{offen}} = \frac{1}{3} \int t^3(s)\ \mathrm{ds} \approx \frac{\chi}{3} \sum_{i=1}^{n} s_i\, t_i^3 \tag{9}$$

$$I_t = I_{t_{geschlossen}} + I_{t_{offen}} \tag{10}$$

$$I_\rho = \int h^2 t \mathrm{ds} \tag{11}$$

[5] Mehr als 11 bar Reifenluftdruck sind mit einer Handluftpumpe mit 16 mm Kolbendurchmesser kaum aufzubringen. Speichen werden i.d.R. nicht bis zur Dehngrenze vorgespannt etc..

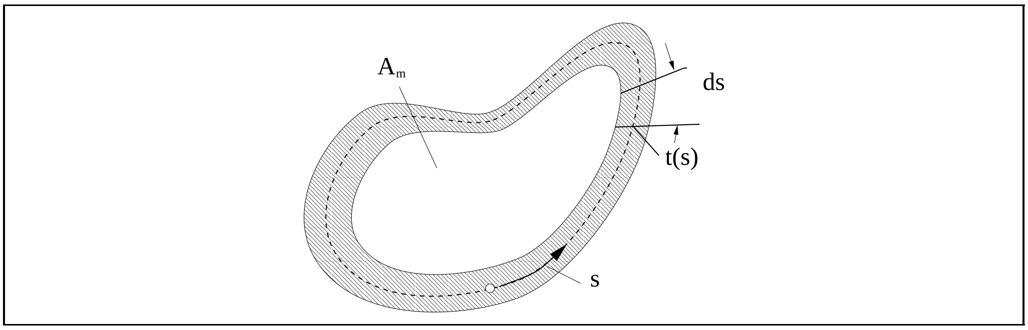


Abbildung 1: Bestimmung von $I_t$

Die Querschnittsfläche des Profiles ist $A$, die Koordinaten des Flächenschwerpunktes $S$ sind $x_s$ und $y_s$. Die x-Achse ist parallel zur Nabe gelegt, die y-Achse radial, normal auf der x-Achse. Die Flächenträgheitsmomente 2. Grades um die Schwerpunktachsen sind $I_x$ und $I_y$, wobei die Hauptachsen wegen der Profilsymmetrie parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Das polare Flächenträgheitsmoment[6] ist $I_p$, nur für kreisförmige Querschnitte ist $I_t = I_p$. $I_p$ ist nicht mit $I_\rho$ ($I_{polar}$ im Programm `CROST`[7]) um den Schubmittelpunkt, wie es A. N. Rodionov definiert, vergleichbar. Der vorzeichenbehaftete lotrechte Abstand zwischen dem Schubmittelpunkt $M$ und der Tangente der Teilstrecke $ds$ ist $h$. Für offene Profile liegt der Faktor $\chi$ je nach Querschnittsform bei 0,9–1,31.[8]

Für die Berechnung von $I_{t_{geschlossen}}$ bei $n$-zelligen Körpern können mehrere Ansätze verwendet werden:

1. Näherungsweise können alle Torsionsflächenträgheitsmomente der einzelnen Teilgeometrien ausgerechnet und dann summiert werden.

2. Für die genaue Berechnung der Torsionsflächenmomente 2. Grades muß nach Wittenburg das in [20] und [6] erwähnte lineare Gleichungsystem aufgestellt und für $K_i$ und $\varphi'$ gelöst werden:

$$
\begin{aligned}
K_i \oint_i \frac{\mathrm{ds}}{t(s)} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} K_j \int_{s_{ij}} \frac{\mathrm{ds}}{t(s)} - 2GA_i\varphi' &= 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \\
-\sum_{i=1}^{n} 2GA_iK_i &= -GM_t
\end{aligned}
$$

[6] Die CAD-Programme I-DEAS und AutoCAD berechnen nur das polare Flächenträgheitsmoment, nicht $I_t$!

[7] von A. N. Rodionov erstelltes Programm zur Bestimmung der Flächenmomente 2. Grades und Wölbwiderstände von Plattenkonstruktionen (Schiffen)

[8] Siehe hierzu Rumpel et al. in [2] S. C29

Die Koeffizientenmatrix besitzt eine Form ähnlich:

$$\begin{bmatrix} U_1 & -l_{12} & -l_{13} & \dots & -cA_1 \\ -l_{12} & U_2 & -l_{23} & \dots & -cA_2 \\ -l_{13} & -l_{23} & U_3 & \dots & -cA_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -cA_1 & -cA_2 & -cA_3 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ \vdots \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -cM_T/2 \end{bmatrix}$$

Die Fläche innerhalb der Wandmittellinie $s_i$ der Zelle $i$ ist $A_i$. Das Torsionflächenmoment 2. Grades erhält man schließlich über die Differentialgleichung der Drillinie:

$$I_t = \frac{M_t}{G\varphi'}$$

Dieses Verfahren wird von `CROST` verwendet.

3. Mit der „Seifenhautmethode“ (Prandtls Membrananalogie) kann das Torsionsflächenmoment 2. Grades bestimmt werden. Orientierende Versuche sind sehr einfach mit einer Schale, einem Strohhalm, etwas Spülmittel und Wasser sowie einer Maske durchführbar. Zahlenwerte sind mit viel Aufwand erzielbar. Berechnungsverfahren für $I_t$ mit Hilfe des Seifenhautgleichnisses sind bei Zsabó [27], Wittenburg et al. [20] und sehr ausführlich in Kap. III §6 bei Biezeno et al. [3] beschrieben. Man nahme sich einen Kasten und versehe eine Fläche dessen mit einem Loch mit der Geometrie des gesuchten Querschnittes. An der Lochkante wird eine Seifenhaut aufgespannt. Bei Hohlquerschnitten werden die Platten, die die Löcher darstellen, im Gleichgewicht aufgehängt, so daß sie sich ohne Reibung parallel zur Kastenfläche auf- und abwärts bewegen können.[9] Man erzeuge in diesem Kasten einen kleinen[10] [11] Überdruck $p$ und messe das Volumen $V$, das die Seifenhaut aufspannt.[12] Das Torsionsflächenmoment 2. Grades beträgt dann

$$I_t = \frac{4\sigma V}{p}$$

Meßfehler ($\sigma$, $p$, $V$) kann man kontrollieren, wenn der gleiche Überdruck eine Seifenhaut über einen bekannten, zum Beispiel kreisförmigen, Querschnitt aufspannt und daraus die Fehler im jeweiligen Versuchsaufbau bestimmt.

[9] Hier wird dann auch eindeutig der Unterschied zwischen geschlitzten und ungeschlitzten Profilen einsichtig.

[10] Messungen in Seifenblasen ergaben Überdrücke von ca. 4 Pa $\hat{=}$ 0,408 mm WS

[11] Nach [8] kann der Überdruck in einer Seifenblase mit $\Delta p = 4\sigma/r$ berechnet werden. Der Radius der Seifenblase ist $r$. Die Oberflächenspannung, auch Kapillarkonstante genannt, liegt i.d.R. im Bereich von $30\text{–}70 \cdot 10^{-3}$ N/m [8] (30–35 bei Tensid-Wassergemischen und 72 für reines Wasser). Daraus folgt, daß mit den relativ großen Radien, die die Seifenhaut über einem 5:1-Modell im Versuch aufspannen würde, Differenzdrücke von max. 20 Pa zu messen wären.

[12] Kann mit einem Kolbenprober oder einer Spritze geschehen

Die größten Schubspannungen treten an der Stelle des größten Gefälles der Seifenhaut auf. Einfache Versuche zeigen: Je spitzer der Winkel zwischen zwei Körperkanten ist, desto größer ist die Schubspannung. Wird der Winkel sehr spitz, so wandert der Seifenhautrand bei geringem Überdruck in die Fläche und versucht den Krümmungsradius zu vergrößern.

4. Über Torsionsversuche ungebogener Halbzeuge kann man auf das Torsionsflächenträgheitsmoment zurückrechnen. Angeschriebene Felgenhersteller waren jedoch nicht willens unverformte Halbzeuge zu Meßzwecken zur Verfügung zu stellen.

Die Ansätze zur Berechnung von $I_{t_{geschlossen}}$ gelten nur für dünnwandige Querschnitte. Die verwendeten Felgenquerschnitte sind dafür eventuell schon zu dickwandig. Jedoch nennt kein Autor Grenzen, ab welchem Wandstärken/Ausdehnungsverhältnis ein Profil als dünnwandig angesehen werden kann.[13]

Bei der rechnerischen Bestimmung der Drillsteifigkeit $I_t$ müssen zumindest nach den Formeln (9) und (8) durch die Diskretisierungsintervalle mit Abweichungen von realen $I_t$ gerechnet werden.

Die Profilkennwerte von Felgen wurden durch das Vermessen durchgesägter, gebrauchter Felgen gewonnen. Die Außengeometrie im Flankenbereich wurde von neuen Felgen abgenommen. Soweit nicht ausdrücklich erwähnt, wird mit Felgendurchmessern 622 mm nach ETRTO gerechnet. In einigen Bereichen wird analog mit der 20" Größe 406 mm gerechnet.[14]

In der Fahrradtechnik werden derzeit 3 unterschiedliche Felgenquerschnitte verwendet: Hohlkammer- und Standardfelgen für Drahtreifen und hornlose Hohlkammerfelgen für Schlauchreifen. Hier wird nur eine Auswahl der möglichen Felgenquerschnitte betrachtet. Als Hohlkammerfelge wird exemplarisch das Modell 2317 von Weinmann benutzt. Andere Felgen werden meist nur zum Vergleich der Flächenkennwerte und weiterer Eigenschaften aufgeführt.

**Weinmann 2317 :** Eine häufig verbaute Hohlkammerfelge, mit der der Autor persönlich sehr zufrieden ist. Sie war nach ca. 20.000 km bei ca. 70 % innerstädtischen Kurzstrecken mit vielen Bremsungen durchgebremst.

**Alesa 917 :** Bei der zur Verfügung gestellten gebrauchten Felge war die Seitenwand bis auf 0,35 mm heruntergebremst. Der Hakenbereich waren auf 1,0 mm Wandstärke reduziert. Bei 0,9 mm im Hakenbereich besteht akute Gefahr, daß die Felge auseinanderplatzt.[15] Die Felge weist außen einen ähnlichen Querschnitt wie die 2317 auf.

**Campagnolo Stehno :** Eine 26" Mountainbikefelge, die als sehr stabil gilt. Die Felge riß an den Nippellöchern ein, als versucht wurde, sie geradezubiegen. Bei dieser Felge sind Höhenschläge mit den Speichen nur sehr schwierig zu zentrieren.

[13] Bei Vollstäben gilt $s/t \geq 10$ als dünnwandig.
[14] 20" beinhaltet die Felgengrößen 406, 438, 440 und 451
[15] Eigene und fremde Erfahrung. Berechnung siehe auf Seite 22

**Schürmann :** Das Profil wurde von einer 406×20 Felge (20”) abgenommen. Es dient hier als exemplarisches Beispiel von Standardfelgen.

**Araya RM400 PRO :** Bei der zur Verfügung gestellten, gebrauchten Hohlkammerfelge brach beim Geradebiegen das Hohlkammerprofil an der Seitenflanke vollkommen auf. Die Felge war nicht durchgebremst. Bei dieser Felge lag offensichtlich ein Konstruktions- oder Fertigungsfehler vor.[16] In den Bruchspalten war eine schwarze Oxidschicht vorhanden, die darauf schließen läßt, daß die Felge im gebrochenen Zustand noch längere Zeit gefahren wurde.

**Variation 1:** Aus den in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnissen wurde eine optimierte Felge entwickelt. Sie weist im Bremsklotzbreich eine Wandstärke von 2 mm, im Nippelbereich 2,5 mm und sonst 1 mm auf. Bei einer Maulweite von 13 mm hat sie eine Profilhöhe von 25 mm.

Die Berechnung der Kennwerte wurde mit dem CAD-Programm AutoCAD R12, mit dem auch die Felgenprofile nach der Vermessung gezeichnet wurden, durchgeführt. Die Torsionsflächenmomente wurden erst „zu Fuß“ nach Methode 1 auf S. 4 ausgerechnet.[17] Kontrollrechnungen wurden dann mit diskretisierten Felgenquerschnitten unter `CROST` vorgenommen. Die Maulweite ist der lichte innere Abstand zwischen den Felgenhörnern; eventuelle Haken sind mitzumessen. Die Maulweite wird in Millimetern angegeben.

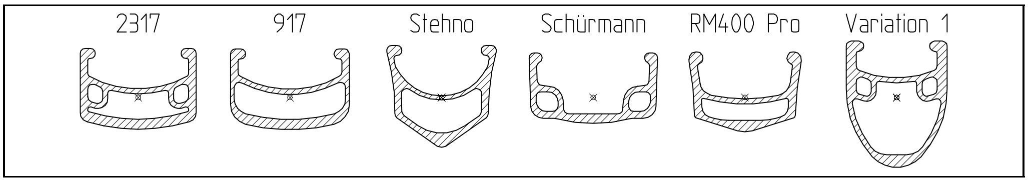


Abbildung 2: Querschnitte von Felgenprofilen

[16] Die ungenügend gestaltete Strangpreßform verursacht eine scharfe Kante (Radius ca. 0,2–0,3 mm) im Knoten von Schlauchbett und Felgenflanke auf der Hohlkammerseite. Andere Felgen weisen hier Radien von $> 0,5$ mm auf.

[17] Wird von AutoCAD R12 und R13 nicht unterstützt

Tabelle 1: Querschnittskennwerte von Felgen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Konstruktion | Hohlkammer | Hohlk. | Hohlk. | Standard | Hohlk. | Hohlk. |
| Hersteller | Weinmann | Alesa | Campagnolo | Schürmann | Araya | |
| Typ | 2317 | 917 | Stehno | | RM400 Pro | Variation 1 |
| Legierung | | | 6082 T6 | | 7000 T6 | |
| Stoß | Stifte | Formrohr | Formrohr | Stifte | Schweißnaht | Stifte |
| Ösung | doppelt | doppelt | nein | nein | nein | nein |
| Maulweite | 17 | 17 | 16 | 20 | 16,5 | 13 |
| $U_F$ | 157,8 | 142,1 | 131,7 | 122,4 | 123,94 | 171,1 |
| $A_F$ | 123,2 | 101,3 | 88,6 | 92,0 | 88,67 | 125,5 |
| $I_x$ | 2445,6 | 2388,6 | 2843,6 | 1497,6 | 1744,8 | 6385,7 |
| $I_y$ | 8262,4 | 6756,7 | 4586,4 | 7725,0 | 5168,5 | 6672,0 |
| $I_p$ | 10708,0 | 9145,3 | 7430,0 | 9222,6 | 6913,3 | 13057,7 |
| $i_p^2$ | 87,9 | 90,5 | 83,9 | 100,2 | 78,0 | 104,0 |
| $I_t$ | 2048,0 | | 1455,4 | 392,3 | | |
| nach CROST | | | | | | |
| $I_t$ | 2109 | 1830 | 1507 | 351 | 803 | 5193 |
| $I_\rho$ | 6707 | 5540 | 6628 | 7414 | 6097 | 9098 |
| $C_M$ | 80420 | 50850 | 40770 | 75306 | 69800 | 47900 |
| $x_M$ | -5,49 | -5,63 | -8,11 | -7,77 | -7,37 | -5,87 |

Der Schubmittelpunkt liegt $x_M$ unter dem Flächenschwerpunkt des Felgenprofiles, der in Abbildung 2 durch einen Punkt gekennzeichet ist. Wird die 2317 in der Mitte des Schlauchbettes geschlitzt, so sinkt $I_t$ auf 228 mm$^4$ und $C_M$ steigt auf 256200 mm$^6$.

Der Felgenumfang ist die Länge der abgewickelten Felge. Es ist der Durchmesser des Profilschwerpunktes zu wählen. Hier wird mit einer 28" Felge gerechnet.

$$l_F = \pi\, d = \pi\, 610 \text{ mm} = 1917 \text{ mm}$$

Wenn nicht anders vermerkt ist, so wird mit einer Weinmannfelge, Profiltyp 2317 , mit einer ETRTO[18]-Größe von 622×17 gerechnet. Ungenauigkeiten in den theoretischen Berechnungen durch nicht übereinstimmende Schwerpunkte (ETRTO, Flächenschwerpunkt, Felgenbett) werden vernachlässigt.

## 2.2 Felgenwerkstoffe

Fahrradfelgen werden in der Regel aus stranggepreßten Aluminium-Knetlegierungen hergestellt. Je nach Nachbehandlung des Werkstoffes können die Festigkeiten und Bruchdehnungen stark schwanken.

[18] European Tyre and Rim Technical Organisation

Tabelle 2: Festigkeiten von Aluminium

| Kurzzeichen | Werkstoffnr. | Registernr. | $R_m$ | $R_e$ | $\sigma_{Schwell}$ | $\tau_{Schwell}$ | $\sigma_q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AlMgSi 0,5 | 3.3206 | 6101 B | 130–245 | 65-125 | | | |
| AlMgSi 1 | 3.2315 | | 205–310 | 110–260 | 100-180 | 115-200 | 58,5–105 |
| AlZnMg 1 F36 | 3.4335 | | 350-393 | 280-350 | | | |
| AlCuMg 1 | 3.1325 | 2017 A | 340–380 | 260–260 | | | 145–175 |
| AlMg1SiCu | 3.3211 | 6061 T6 | | 220 | | | |

Die Werte für die Quetschfestigkeit $\sigma_q$ sind dem Vortrag von T. Domes [7] entnommen. Näherungsweise kann danach $\sigma_q$ mit $0,5 \times R_{p0,2}$ angenommen werden. Hier wird mit einem E-Modul für Aluminium von 75000 N/mm$^2$ gerechnet, die Streubreite liegt bei 60000–80000 N/mm$^2$. Für die Querkontraktionszahl $\mu$ kann 0,33 angenommen werden. Daraus folgt der Schubmodul als

$$G = \frac{Y}{2(1+\mu)} = \frac{75000\ \mathrm{N/mm^2}}{2(1+0,33)} = 28195\ \mathrm{N/mm^2} \tag{12}$$

Teilweise wird der E-Modul unter Einfluß der Querdehnung verwendet:

$$\bar{Y} = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} Y = 1,48 \cdot 75000 = 111123\ \mathrm{N/mm^2} \tag{13}$$

## 2.3 Bestimmung der axialen Felgenabstützung

Die Felge wird durch die Speichen abgestützt. Die Speichen ziehen schräg an der Felge und können als axial wirkende Federn, die die Felge abstützen, abstrahiert werden. Speichen werden in der Regel aus Stahl[19] gefertigt. Somit ist ein E-Modul von 210 kN/mm$^2$ anzunehmen. Die Federsteifigkeit der Einspeichung in axialer Richtung ist geometriebedingt nichtlinear anzusetzen.

Die Speichung wird einfachheitshalber unverflochten angenommen, dies dürfte sich aber nur gering auswirken.[20] Das Verflechten[21] von Speichen hat nach bisheriger Abschätzung nur bei angetriebenen Laufrädern unter Umständen positive Effekte. Dort spannen die Hauptbelastungsspeichen die entlasteten Speichen über die Verflechtung, so daß bei idealen Voraussetzungen diese nicht entspannt werden und damit auch die Tendenz, die Felge zum auf S. 27 erläuterten $z/4$-Eck zu verformen, vermindert wird. Weiterhin haben verflochtene Speichen auf der Zahnkranzseite den Vorteil, daß die äußeren Speichen vom Schaltwerk weg nach innen gezogen werden. Radiale Verformungen und Verschiebungen werden vernachlässigt. Die Geometriefehler dadurch, daß die Speichennippel in zwei Lochebenen in der Felge hängen, hier aber nur in einer Ebene, werden vernachlässigt.

[19] Materialen wie Titan und Kohlefaser werden kaum verwendet.

[20] Siehe hierzu auch die Betrachtungen für die Konstruktion des Speichenspannungsmeßgerätes auf S. 50

[21] Die innen aus dem Nabenflansch austretende Speiche wird an der felgennächsten Kreuzung axial außen an der kreuzenden Speiche vorbeigeführt.

### 2.3.1 Auswirkung verjüngter Speichen

Ob eine verjüngte Speiche vereinfachend als komplett verjüngt angenommen werden kann, klärt die folgende Betrachtung.

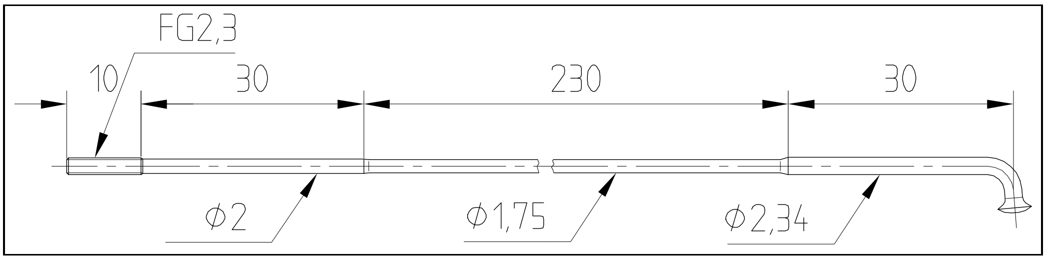


Abbildung 3: Verjüngte Speiche

Die Federsteifigkeit einer unverjüngten Speiche mit dem Durchmesser $d$ der verjüngten Speiche im verjüngten Bereich sei $c_u$. Die Federsteifigkeit der verjüngten Speiche sei $c_v$.

$$c_u = \frac{YA_{Sp}}{l} \tag{14}$$

$$\frac{1}{c_v} = \frac{l_1}{YA_{Sp_1}} + \frac{l-l_1-l_2}{YA_{Sp}} + \frac{l_2}{YA_{Sp_2}} \tag{15}$$

$$\frac{c_u}{c_v} = \frac{l}{d^2\left(\frac{l_1}{d_1^2} + \frac{l-l_1-l_2}{d^2} + \frac{l_2}{d_2^2}\right)} = \frac{290}{1,8^2\left(\frac{30}{2{,}34^2} + \frac{230}{1{,}75^2} + \frac{30}{2^2}\right)} = 1,0659 \tag{16}$$

Die verdickten Speichenenden bewirken hier eine Speichensteifigkeitssteigerung von 6,6 %. Der Hauptzweck der verdickten Enden liegt jedoch in den gegenüber dünnen Speichen verringerten Spannungen in der Kröpfung und dem Gewinde am Nippel und der daraus verbesserten Dauerfestigkeit. Im verjüngten Mittelstück liegt eine reine Zugbelastung vor, die kleine Querschnitte zuläßt. In den Endbereichen liegen Kombinationen aus Zug, Biegung und Schub vor. Bei neueren Speichen werden die verdickten Bereiche teilweise nur noch mit einer Länge von 10–15 mm ausgeführt, so daß die Steifigkeitserhöhung vernachlässigt werden kann.

### 2.3.2 Geometrische Betrachtung der Axialverschiebung

Wird vereinfachend davon ausgegangen, daß bei geringen axialen Auslenkungen die Felge, und damit die Speichennippel, sich auf einem Zylindermantel bewegen, so kann folgende geometrische Betrachtung ausgeführt werden. Sie ist bei größen Auslenkungen nicht mehr gültig, da der Felgenumfang nahezu[22] konstant bleiben wird und damit eine Radienänderung eintreten wird.

[22] Durch die wegfallende Speichenvorspannung kann sich die druckvorgespannte Felge im Umfang um ca. 2,5 mm ausdehnen. Berechnungen s. S. 20

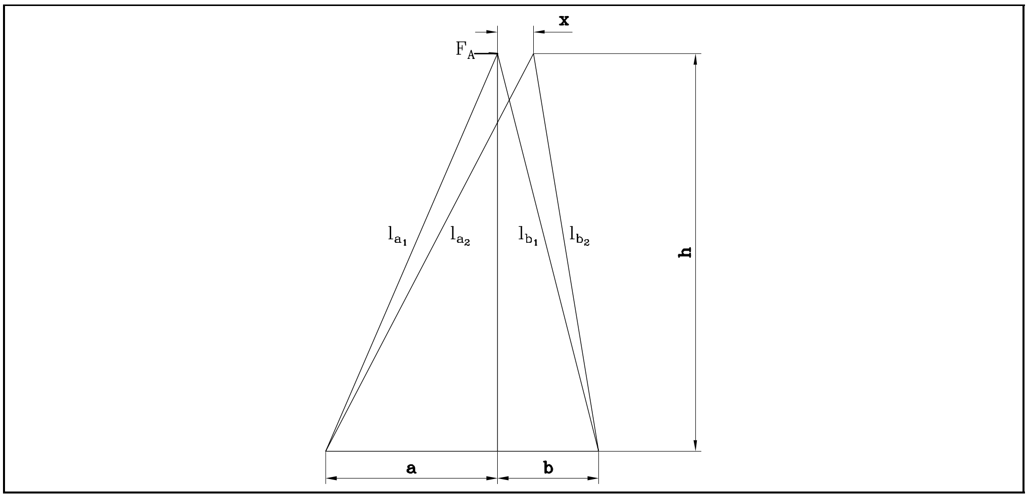


Abbildung 4: Freigeschnittenes Speichenpaar

Die Längen der unvorgespannten Speichen werden aus den Zusammenhängen $c_{sp_a} = \frac{Y\,A_{Sp}}{l_{a0}}$ und $F_{a1} = c_{sp_a}\,(l_{a1} - l_{a0})$ gewonnen:

$$A_{Sp} = \frac{\pi d^2}{4} \tag{17}$$

$$l_{a1} = \sqrt{a^2 + h^2} \tag{18}$$

$$l_{b1} = \sqrt{b^2 + h^2} \tag{19}$$

$$l_{a0} = \frac{l_{a1}}{1 + \frac{F_{a1}}{Y\,A_{Sp}}} \tag{20}$$

$$l_{b0} = \frac{l_{b1}}{1 + \frac{F_{b1}}{Y\,A_{Sp}}} \tag{21}$$

$$l_{a2} = \sqrt{(a + x)^2 + h^2} \tag{22}$$

$$l_{b2} = \sqrt{(b - x)^2 + h^2} \tag{23}$$

Die Federsteifigkeit einer Speiche in Speichenrichtung ist:

$$c_{Sp_a} = \frac{Y\,A_{Sp}}{l_{a0}} \tag{24}$$

$$c_{Sp_b} = \frac{Y\,A_{Sp}}{l_{b0}} \tag{25}$$

Damit wird die Federsteifigkeit ($c_A$) eines Speichenpaares in axialer Richtung:

$$F_{a2} = c_{Sp_a} (l_{a2} - l_{a0}) \tag{26}$$

$$F_{A_{a2}} = F_{a2} \frac{a+x}{l_{a2}} \tag{27}$$

$$F_{b2} = c_{Sp_b} (l_{b2} - l_{b0}) \tag{28}$$

$$F_{A_{b2}} = -F_{b2} \frac{b-x}{l_{b2}} \tag{29}$$

$$F_A = F_{A_{a2}} + F_{A_{b2}} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} c_A &= \frac{F_A}{dx} = c_{A_a} + c_{A_b} \\ &= c_{Sp_a} \left(1 - \frac{l_{a0}}{l_{a2}} \left(1 - \frac{(a+x)^2}{l_{a2}^2}\right)\right) + c_{Sp_b} \left(1 - \frac{l_{b0}}{l_{b2}} \left(1 - \frac{(b-x)^2}{l_{b2}^2}\right)\right) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\beta = c_A \frac{z}{2} \frac{1}{l_F} \tag{32}$$

Für die Kippuntersuchungen ist die Bettungsteifigkeit $\beta$ an der Stelle $x = 0$ zu verwenden. Für teilweise ausgelenkte Felgen ist nicht die Stelle $x = 0$ sondern die Stelle $x \approx -2$mm problematisch.[23] Hier wird die linke Speiche entlastet, sie trägt nicht mehr mit.[24] Die Federsteifigkeit weist einen Sprung auf einen geringeren Wert auf. Bis hierhin wird die Felge sich auf einer Zylindermantelfläche verformt haben. Nicht betrachtet wird, ab wo sie sich auch radial verformt.

Da die Speichen die Felge nur in einem engen Bereich abstützen, ist dieser Bereich abzuschätzen. Aufgrund der Bruchdehnung von Fahrradspeichen von ca. 8 mm bei 290 mm Speichenlänge kann der Bereich, in dem die Speichen nicht gerissen sind, nach oben hin wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} x_{a_{reißt_{0,1}}} &= a \pm \sqrt{(l_{a0} + 8)^2 - h^2} \\ &\Rightarrow x_{a_{reißt_0}} = -119,12 \text{ mm}, x_{a_{reißt_1}} = 39,12 \text{ mm} \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} x_{b_{reißt_{0,1}}} &= b \pm \sqrt{(l_{b0} + 8)^2 - h^2} \\ &\Rightarrow x_{b_{reißt_0}} = -50,7 \text{ mm}, x_{b_{reißt_1}} = 90,7 \text{ mm} \end{aligned} \tag{34}$$

Da die Speichen aufgrund ihres Schlankheitgrades und der Nippelaufhängung in Hohlkammerfelgen nicht auf Druck belastet werden können, knicken sie aus. Der Nippel bekommt

[23] Der Abstand ist von dem Speichendurchmesser, der Vorspannung und dem Laufraddruchmesser abhängig.

[24] Vorgespannte Speichen könne „Druckkräfte“ übertragen. Analog ist die Antriebsmomentaufnahme von $z$ und nicht $0,5z$ Speichen

im Nippeltopf Lose und kann sich losdrehen und die Speichenvorspannung abbauen. Man kann einen Bereich abschätzen, in dem die eine Speichenseite durch Knicken nicht zur Axialsteifigkeit durch Spannungsab oder -aufbau beiträgt:

$$
\begin{aligned}
x_{a_{knickt_{0,1}}} &= a \pm \sqrt{l_{a0}^2 - h^2} && (35)\\
&\Rightarrow x_{a_{knickt_0}} = -77,39 \text{ mm}, x_{a_{knickt_1}} = -2,61 \text{ mm} \\
x_{b_{knickt_{0,1}}} &= b \pm \sqrt{l_{b0}^2 - h^2} && (36)\\
&\Rightarrow x_{b_{knickt_0}} = 24,63 \text{ mm}, x_{b_{knickt_1}} = 15,77 \text{ mm}
\end{aligned}
$$

Zu beachten ist, daß $x_{a_{knickt}}$ sehr empfindlich auf die Speichenvorspannung reagiert. Bei 200 N Vorspannung reichen schon 1,1 mm Seitenversatz zum Entspannen der Speiche! Dies bekräftigt die Forderung nach einer **gleichmäßig** hohen Speichenvorspannung im Laufrad!

Bewegen sich nun die Nippel parallel zur Nabe, so treten beim standardisierten, nicht symmetrischen 622er Hinterrad von links nach rechts folgende Zustände auf:

Tabelle 3: Gültige Axialfedersteifigkeit

| $x$ von [mm] | bis [mm] | linke Speiche | rechte Speiche | gültige Federsteifigkeit |
|---:|---:|---|---|---|
| $-\infty$ | -118,4 | gerissen | gerissen | 0 |
| -118,4 | -77,4 | intakt | gerissen | $c_{A_a}$ |
| -77,4 | -48,7 | geknickt | gerissen | 0 |
| -48,7 | -2,6 | geknickt | intakt | $c_{A_b}$ |
| -2,6 | 15,4 | intakt | intakt | $c_A$ |
| 15,4 | 26,6 | intakt | geknickt | $c_{A_a}$ |
| 24,6 | 38,4 | intakt | intakt | $c_A$ |
| 38,6 | 88,7 | gerissen | intakt | $c_{A_b}$ |
| 88,7 | $\infty$ | gerissen | gerissen | 0 |

Trägt man die Axialkräfte $F_{A_{a2}}$ und $F_{A_{b2}}$ des Speichenpaares über der Axialverschiebung $x$ auf, so erkennt man die, für Durchschlagsprobleme charakteristischen, Polynome ungeraden Grades. In den Abbildungen 5 und 6 sind die Kräfte und Federsteifigkeiten für $a = 40$ mm, $b = 20$ mm, $h = 290$ mm, $d_{Sp} = 1,8$ mm und $Y = 210$ kN/mm$^2$ aufgetragen. Es wird die maximale Speichenspannung variiert.

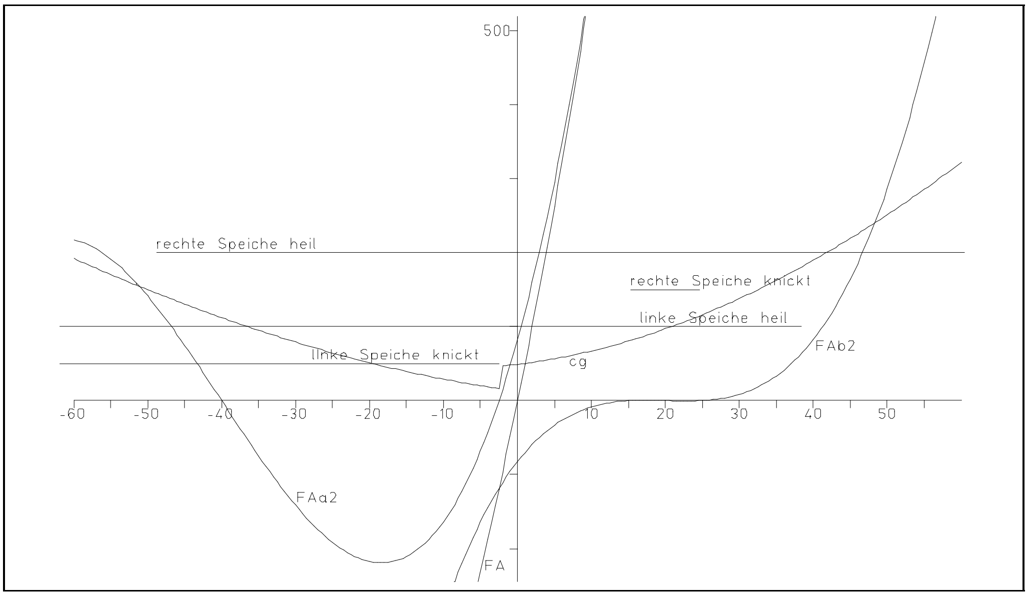


Abbildung 5: Exemplarischer Verlauf der Kräfte und Federsteifigkeit bei $F_{Sp_{max}} = 1200$ N

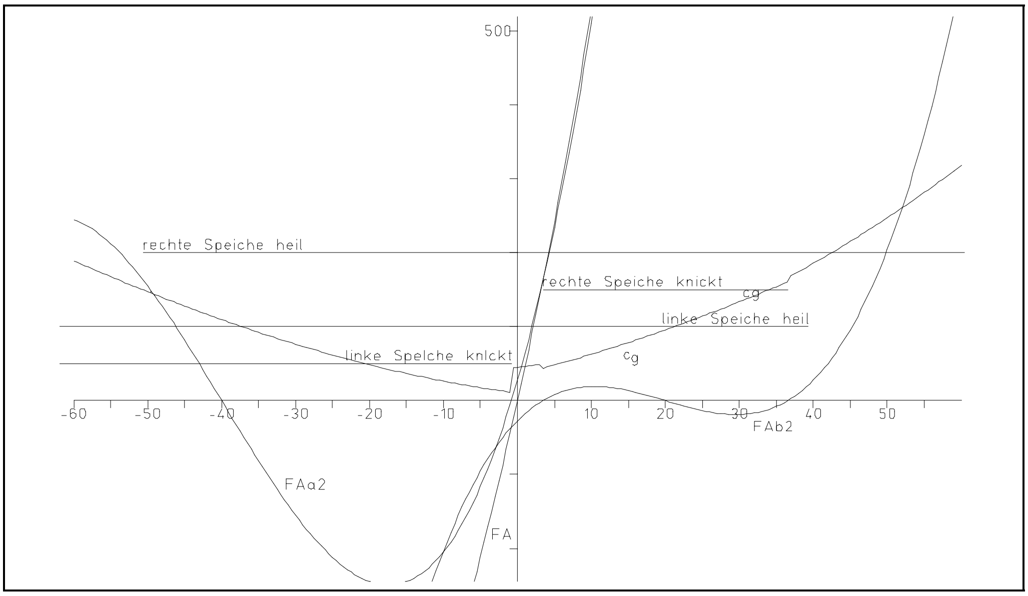


Abbildung 6: Exemplarischer Verlauf der Kräfte und Federsteifigkeit bei $F_{Sp_{max}} = 400$ N

### 2.3.3 Exemplarische Berechnungen von Speichungsaxialfedersteifigkeiten

Als Grundannahme wird der Flanschabstand für außermittig gespeichte angetriebene Laufräder mit 60 mm und für mittig gespeichte Vorderräder mit 70 mm angenommen.

406er Laufräder weisen ein $h$ von 180 mm, 622er ein $h$ von 290 mm auf. Es werden 1,8 mm dicke Speichen aus Stahl angenommen.

Die maximale Speichenkraft sei 1200 N.[25] Das Kräftegleichgewicht an der Felge liefert bei der gewählten Außermittigkeit eine Kraft in der linken Speiche von 600 N.

Tabelle 4: Berechnungsergebnisse der Speichenaxialfedersteifigkeiten

| Laufrad | 622 | 622 | 622 | 622 | 406 | 406 | 406 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Position | vorne | hinten | hinten | hinten | vorne | hinten | hinten |
| Speichung | zentr. | zentr. | exz. | exz. | zentr. | exz. | exz. |
| $a$ | 35 | 30 | 40 | 40 | 35 | 40 | 40 |
| $b$ | 35 | 30 | 20 | 20 | 35 | 20 | 20 |
| $d_{Sp}$ | 1,8 | 2,3 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 | 1,8 |
| $h$ | 290 | 290 | 290 | 290 | 180 | 180 | 180 |
| $F_{a1}$ | 400 | 650 | 600 | 200 | 400 | 200 | 600 |
| $F_{b1}$ | 400 | 650 | 1200 | 400 | 400 | 400 | 1200 |
| $l_{a0}$ | 291,9 | 291,3 | 292,4 | 292,6 | 183,2 | 184,3 | 184,2 |
| $l_{b0}$ | 291,9 | 291,3 | 290,0 | 290,5 | 183,2 | 181,0 | 180,7 |
| $c_{Sp_a}$ | 1830,8 | 2994,9 | 1827,5 | 1826,1 | 2916,4 | 2899,2 | 2901,4 |
| $c_{Sp_b}$ | 1830,8 | 2994,9 | 1842,5 | 1839,7 | 2916,4 | 2952,9 | 2957,3 |
| $c_A$ | 55,3 | 67,8 | 48,9 | 44,8 | 216,7 | 175,7 | 182,4 |
| $\beta$ | 0,52 | 0,64 | 0,46 | 0,42 | 1,33 | 1,08 | 1,12 |

Daraus folgt, daß in 406er Laufrädern die Speichen die Felgen 3,7 mal besser seitlich abstützen als 622er und 2,3 mm dicke Speichen gegenüber 1,8 mm dicken in 622er Laufrädern einen Seitensteifigkeitsgewinn von ca. 39 % bringen.

## 2.4 Bestimmung der Belastungen

Aufgrund der vorliegenden Schilderungen kann davon ausgegangen werden, daß beim Versagen der Felgen keine nennenswerten Fahrbelastungen vorlagen. Der innere Belastungszustand der Felge muß also ausschlaggebend sein. Der innere Belastungszustand wird durch die Speichenkraft und den Reifenluftdruck aufgeprägt. Äußere Belastungen werden durch die Fahrbelastungen aufgeprägt. Diese sind das, für die Speiche quasistatische, Antriebsmoment und die schwellende Belastung durch das Systemgewicht. Hier wird von stoßfreiem, gleichmäßigem Antrieb und ebener Fahrbahn ausgegangen.

[25] Zur Begründung dieser in erster Sicht hohen Kraft s. S. 16

### 2.4.1 Speichenvorspannkräfte

Die Felge wird durch $z$ Speichen in ihrer Lage zur Nabe fixiert. Diese Speichen werden bei der Zentrierung der Felge zur Nabe vorgespannt und setzen damit die Felge als Zylinderschale unter einen Außendruck.

Versuche, die maximale zulässige Speichenkraft über den Speichenquerschnitt und $R_{p0,2}$ zu berechnen, schlagen aus mehreren Gründen fehl.

- Verfügbare Literaturdaten für nichtrostende Stähle (DIN 17440) erreichen nicht die von Winkler in [24] angegebene Mindestzugfestigkeit. Nach Winkler soll die Mindestzugfestigkeit von Speichen aus Stahl und nichtrostendem Stahl bei 1200±100 N/mm$^2$ liegen. Allein die Stahlsorte X30Cr13 (1.4028) erreicht mit 1000 N/mm$^2$ im vergüteten Zustand fast die geforderte Zugfestigkeit. Die Streckgrenze liegt dann bei ca. 600 N/mm$^2$.
- Speichen werden aus Draht gezogen. Sie sind somit in der Regel kaltverfestigt und die Literaturdaten geben für die sich einstellenden Festigkeiten keine Anhaltswerte.
- Aufgrund des geringen Drahtdurchmessers wirkt sich hier die Bauteilgrößenabhängigkeit der zulässigen Spannungen stark aus.
- Federstähle nach DIN 17223 T1 & T2 und DIN 17224 haben im Speichendurchmessser gezogen mit 1500–1900 N/mm$^2$ Zugfestigkeiten, die den Ansprüchen genügen. Jedoch werden Fahrradspeichen in der Regel nicht aus Federstahl gefertigt.

Verschiedene Zugversuche von Fahrradspeichen durch Jobst Brandt und die TU HH ergaben Bruchlasten von 2200–2900 N.[26] Die Auswertung der Diagramme läßt auf Dehngrenzen von 1000–2000 N schließen.

Da sich in einem Briefwechsel mit Jobst Brandt und Hans-Joachim Zierke (Berlin) die zuerst angenommenen Speichenvorspannkräfte von 250–500 N als zu gering herausstellten, wurde ein Speichenkraftmessgerät entwickelt und gebaut.[27] In selbst eingespeichten Laufrädern wurden mit dem Meßgerät im radial eingespeichten Vorderrad 900 N und im 3-fach gekreuzten und unverflochtenen Hinterrad 700 bzw. 1100 N gemessen. Diese Laufräder sind subjektiv mittelhart eingespeicht.

Für die Berechnungen wird eine maximalen Speichenkraft von $F_{Sp} = 1200$ N angenommen. Dieser Wert deckt sich mit den Literaturdaten von bis zu 1100 N (H. J. Zierke in [28], Jobst Brandt in [4] und Osten-Sacken in [19]).

Die an der TUHH durchgeführten Zugproben zur Ermittlung der Streckgrenze für ausgeführte Speichen ergaben Zugfestigkeiten von 770–1020 N/mm$^2$ und Dehngrenzen von 400–900 N/mm$^2$.[28] Die Bruchdehnungen lagen bei 3–4 %, die Einschnürdehnungen bei 2–3 %.

[26] An der TU vom Arbeitsbereich KT II 1993 getestet.

[27] Konstruktion und Skizze im Anhang A

[28] Die niedrigen Werte ereichte eine Speiche von Asahi (2,0 mm, 270 mm lang), die hohen Werte eine DT-Comp (2,0–1,8 mm, 300 mm lang).

Ein von Winkler [24] angegebenes Nippelanzugsmoment von 0,75 Nm bei automatischen Einspeichautomaten läßt rechnerisch auf Speichenvorspannkräfte von 450 N schließen. Andere Quellen geben Vorspannkräfte bei maschinell eingespeichten Rädern von 700 N an.

### 2.4.2 Reifeninnendruck

Der Innendruck des Schlauches wird auf der Außenseite durch die Karkasse und den Drahtring in der Decke und auf der Innenseite durch das Felgenbett aufgefangen. Dabei wird zwischen der Decke und der Felge idealerweise nur eine Normalkraft in axialer Richtung übertragen. Einsichtig ist dies bei einfachen Felgen ohne Hakenprofil. Generell wird der Reifendruck im Mantel durch die Drahteinlage aufgefangen. Damit wird die Druckfläche durch die Maulweite[29] der Felge und den Felgenbettumfang begrenzt.

Daraus folgt die Kraft durch den Luftdruck $p$ in einem Felgensegment[30] zu:

$$F_p/\text{ bar} = \frac{d_{ETRTO}\,\pi\, b}{z}\,p = \frac{622\text{ mm}\cdot\pi\cdot 19\text{ mm}}{36}\,\frac{1\text{E}5\text{ N}}{\text{m}^2\text{ bar}} = 103\text{ N/bar} \tag{37}$$

In der Regel werden 20 mm breite Reifen mit 10 bar, 35 mm breite mit 5 bar und 45 mm breite Reifen mit 2,5 bar Luftdruck gefahren.

### 2.4.3 Belastung durch das Systemgewicht

**Überschlägiger Ansatz** Nimmt man eine Zusatzbelastung durch den Fahrbetrieb an, so wirkt sie, für das Kippen maßgeblich, als Streckenlast. Einsichtig ist dies, wenn man die Felge an den Speichen mit Gelenken versieht. Das Systemgewicht wirkt als Zusatzzug in den Speichen. Wird als Laufradbelastung die 0,7 fache Fahrer- +Fahrradmasse von ca. 90 kg angenommen, so ergibt sich eine Kraft von $F_F = (9,81\text{ m/s}^2 \cdot 63\text{ kg})/(z-1)$, die zusätzlich zur Speichenkraft wirkt. Für eine Felge, die an den Speichenlöchern gelenkig ist, gilt $z-1$, für eine reale, biegeweiche Felge ungefähr $z - 0,6\,z$. Dieser Einfluß von ungefähr 17,7 – 43 N ist mithin vernachlässigbar. Anders sieht es aus, wenn das Rad über eine Bodenunebenheit fährt und dann die Belastung als Stoß auftritt. Aufgrund der bisher geschilderten Versagensfälle kann aber davon ausgegangen werden, daß dies nicht der Fall war.

**Realitätsnaher Ansatz** Speichenkraftmessungen mittels Dehnungsmeßstreifen unter der Leitung von M. Federau [10] ergaben, daß nur die jeweils 7 untersten Speichen entlastet wurden, alle anderen Speichen wurden je nach Anzahl der Kreuzungen relativ gleichmäßig belastet. Ein einfaches zweidimensionales FE[31]-Model ergibt ähnliche Ergebnisse.[32]

[29] korrekt wäre Maulweite - 2×(Schlauchwandstärke - Hakentiefe)

[30] $1/z$ vom Felgentorus, der Bereich, den vereinfacht eine Speiche abstützt.

[31] Die Methode der Finiten Elemente ist eine Möglichkeit komplexe mechanische Strukturen in kleine Teilelemente zu zerlegen. Das dabei enstehende lineare Gleichungssystem des Gesamtsystemes wird dann i.d.R. mit Rechnerunterstützung gelöst.

[32] Mit `FElt` unter LinuX erstellt und gerechnet.

Bei einer dreifach gekreuzt eingespeichten 2317 wurden die Speichen (von unten nach oben) mit 183, 138, 51, -2, -19, -20, -15, -13, ...-11 N entlastet. Dabei wird der unterste Knoten mit 1/2, die beiden daneben liegenden Knoten mit 1/4 der Aufstandskraft von insgesamt 600 N belastet.

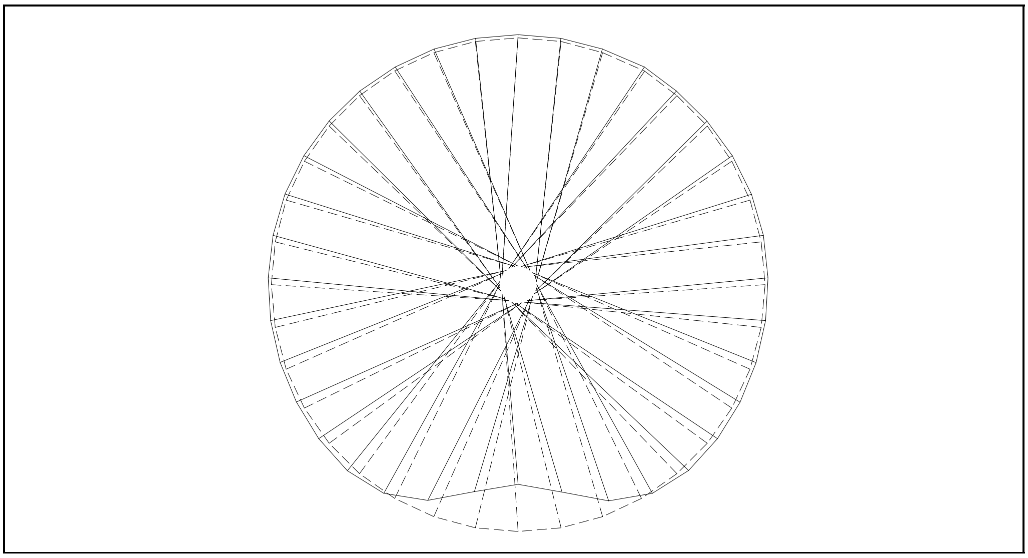

Abbildung 7: Laufradverformung durch die Aufstandskraft (tausendfach überhöht, $I_x = 2445$ mm$^4$, $\sum F_y = 688$ N)

Die FE-Betrachtung widerlegt die weitverbreitete Annahme, radial eingespeichte Laufräder seien für die Laufradfederung spürbar härter als mehrfach gekreuzte. Die 3-fach gekreuzte Felge federt durch das Systemgewicht nur weniger als 0,01 mm mehr ein als eine radial gespeichte Felge. Mantel, Gabel sowie (Renn-) Lenker federn bei sinnvoller Auslegung eindeutig besser. Die Randbedingungen sind die 2317 und 70 kg Aufstandlast. Variiert werden Kreuzungszahl und Speichendurchmesser.

Tabelle 5: Radiale Felgeneinfederung

| Speichungsart | Speichendurchmesser | | |
|---|---|---|---|
| | 1,6 | 1,8 | 2,0 |
| radial | 0,1323 | 0,1095 | 0,0923 |
| 3-fach | 0,1386 | 0,1149 | 0,0971 |

Ein einfacher Vergleich der Felgen 2317 und Variation 1 mit FElt bei einer Einspeichung von 36 bzw. 18 3-fach gekreuzten, 1,8 mm dicken Speichen ergibt die in Tabelle 6 aufgeführten Biegemomente und -spannungen in der Felge und Speichenkräfte. Die Belastung sind die standardisierten 70 kg, die auf die 3 untersten Knoten mit Speichenangriff (Lastverteilung 1/4, 1/2 und 1/4) verteilt wird.

Tabelle 6: Felgen/Speichenzahlvergleich

| Felgentyp | Einheit | 2317 | | Variation 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| Speichenzahl | | 36 | 18 | 36 | 18 |
| Einfederung unten | mm | 0,12 | 0,15 | 0,09 | 0,13 |
| Biegemoment unten | Nmm | 4885 | 3050 | 7460 | 5400 |
| $\sigma_{b_{x_{unten}}}$ | N/mm$^2$ | 16 | 10 | 17 | 13 |
| Entlastung unterste Speiche | N | 209 | 276 | 174 | 244 |
| Belastung oberste Speiche | N | 12 | 32 | 13 | 33 |
| größte Speichenbelastung | N | 27 | 41 | 26 | 47 |

Eine mit wenig Speichen eingespeichte Felge kann sich gleichmäßiger verformen und wird weniger belastet. Die Speichen werden zwar stärker belastet, aber nicht so stark, wie es die Reduzierung der Speichenzahl vermuten ließ, hier ist das „Verschmieren" des weicheren Gesamtsystemes maßgeblich.

### 2.4.4 Normalkraft in der Felge

Unter Vernachlässigung der Biegung der Felge durch die punktuellen Speichenkräfte ergibt sich nach dem Freischneiden des Systems die Normalkraft im Felgenquerschnitt. Winkelfehler durch Kreuzungen und sich daraus ergebende Zugkraftreduzierungen der Speichen werden vernachlässigt.

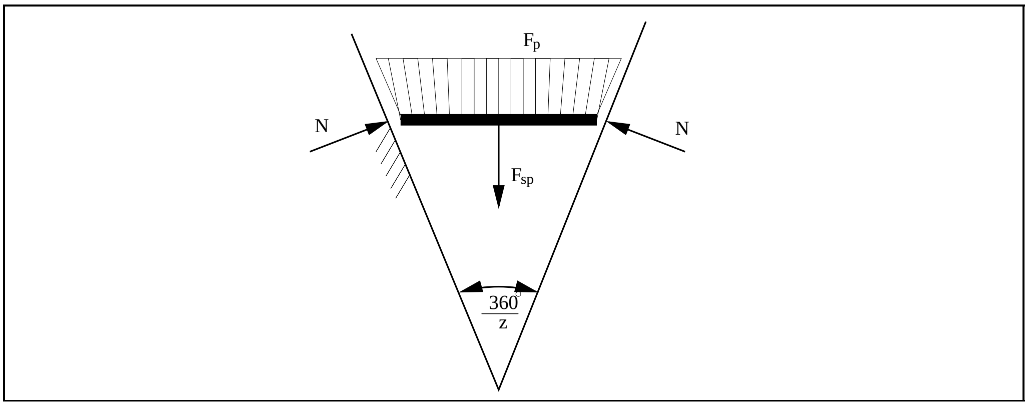


Abbildung 8: Freischnitt eines Felgensegmentes

$$\Sigma F_x = 0 = N \cos\frac{180°}{z} - N \cos\frac{180°}{z} \tag{38}$$

$$\Sigma F_y = 0 = -F_p - F_{Sp} + 2N \sin\frac{180°}{z} \tag{39}$$

$$
\begin{aligned}
N_{mittig} &= \frac{F_{p_{10bar}} + \frac{F_{Sp_r}+F_{Sp_l}}{2}}{2\sin\frac{180°}{z}} = \frac{1031\ \mathrm{N} + 1200\ \mathrm{N}}{2\sin 5°} = 12800\ \mathrm{N} && (40)\\
\lim_{z\to\infty} N_{mittig} &= 12783\ \mathrm{N} && (41)\\
N_{außermittig} &= \frac{1031 + \frac{1200+600}{2}}{2\sin 5°} = 11078\ \mathrm{N} && (42)
\end{aligned}
$$

Da kleine Laufräder einen kürzeren Felgenumfang aufweisen, werden sie weniger vom Schlauchdruck belastet. Für 559 mm (26”) ergibt sich $N = 12200$ N und für 406 mm $N = 10740$ N.

Einfache FE-Rechnungen mit `FElt` ergeben bei einer Aufstandskraft von 686 N eine zusätzliche Normalkraft von ca. 90 N gegenüber dem unbelasteten Laufrad. Da der innere Belastungszustand die Felge unter eine Normalkraft von ca. 12800 N setzt, kann man die Aufstandskraft für das Kippversagen vernachlässigen.

Mit der Querschnittsfläche von 123,24 mm$^2$ für die 2317 ergibt sich eine Normalspannung $\sigma_n$ von 103,7 N/mm$^2$. Hier kommen in der Realität noch Biege- und Kerbspannungen durch die Speichen und Nippellöcher hinzu. Aber trotzdem dürften die Spannungen nicht im kritischen Bereich liegen. Kritisch ist jedoch bei durchgebremsten Felgen die Vergleichsspannung im Felgenhornfuß (s. S. 22 ff.).

Durch die Normalkraft verkürzt sich die Felge; ihr Durchmesser nimmt ab. Der Vorspannungsverlust $\Delta F_{Sp}$ einer Speiche durch die Felgenkompression kann mit folgenden Zusammenhängen bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
\Delta F_{Sp} &= c_{Sp}\Delta r_F && (43)\\
\Delta r_F &= \frac{\Delta l_F}{2\pi} && (44)\\
\Delta l_F &= \frac{N}{c_F} && (45)\\
c_F &= \frac{Y_F A_F}{l_F} && (46)\\
N &= \frac{F_p + F_{Sp} - \Delta F_{Sp}}{2\sin 5°} && (47)\\
\Delta F_{Sp} &= \frac{1}{\frac{Y_F A_F l_{Sp} 16\sin 5°}{Y_{Sp} d_{Sp}^2 l_F} + 1}(F_p + F_{Sp}) && (48)
\end{aligned}
$$

Bei der Kombination von 2317 mit 1,8 mm dicken Speichen ergibt sich ein Vorspannungsverlust durch das Aufbringen des Reifenluftdruckes von 10 bar von $\Delta F_{Sp_{0bar}} - \Delta F_{Sp_{10bar}} =$ 265 N.

In einem radial eingespeichten 622er Vorderrad mit einer Felge Open4CD von Mavic (Maulweite 13 mm) und 2 mm Speichen wurde ein Vorspannungsverlust von 40 N bei einem Differenzdruck von 7 bar gemessen. Rechnerisch sind nach Formel 48 250 N zu erwarten. Der Felgenquerschnitt $A_F$ beträgt 69 mm$^2$, aus dem Felgengewicht zurückgerechnet. Diese

Diskrepanz zwischen den gemessenen Vorspannungsverlusten und den gerechneten nach obiger analytischen Lösung und den FE-Rechnungen mit MARC (siehe Tabelle 15 auf Seite 42) kann hier nicht erklärt werden.

# 3 Felgenhornbelastung

Das Felgenhorn wird vorwiegend durch die Reaktionskräfte des Reifeninnendruckes belastet. Für die Belastung des Felgehornes durch den Reifeninnendruck kann mit den „Kesselformeln“ für einen Kreisring nach [2] C39 „Rohrbogen unter Innendruck“ gerechnet werden:

$$\sigma_\varphi = \frac{pr}{h}\frac{R/(2r)+0,25\sin\varphi}{R/(2r)+0,5\sin\varphi} \tag{49}$$

$$\sigma_x = \frac{pr}{h} \tag{50}$$

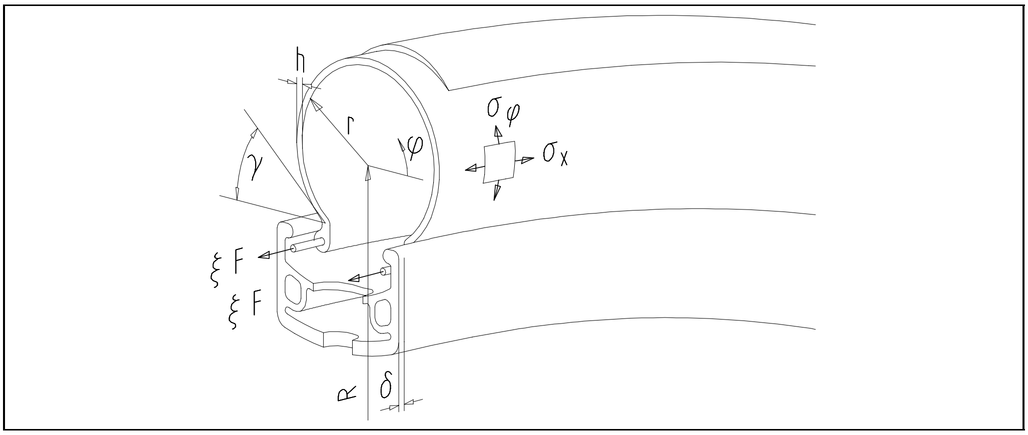


Abbildung 9: Kräfte und Spannungen im Mantel

Die linearisierte Sektorendicke des Torus wird hier mit $\delta$ bezeichnet. Die Spannung $\sigma_x$ wird von der Karkasse und den Drahtringen in den Wulsten aufgefangen, $\sigma_\varphi$ biegt zum Teil das Felgenhorn als Streckenlast auf, zum Teil verstärkt es die Kraft in den Drahtringen. Der Quotient $(R/(2r)+0,25\sin\varphi)/(R/(2r)+0,5\sin\varphi)$ kann bei den hier verwendeten Durchmessern vernachlässigt werden.[33] Der Faktor $\xi$ wird durch das Mittragverhalten der Karkasse bestimmt, er liegt ungefähr zwischen 0,1…0,5.

$$\sigma_\varphi h = \frac{pd_{Ma}}{2} \tag{51}$$

$$F_x = \frac{\pi p d_{Ma}^2}{4} \tag{52}$$

Die Streckenlast $\sigma_\varphi$ wirkt mit einem Winkel $\gamma$ am Felgenhorn, nach außen ziehend. Sie kann vektoriell in eine den Zug im Drahtring verstärkende und eine das Horn nach außen

[33] $R/d_{Ma} \gg 0,5 > 0,25$

biegende Komponente aufgeteilt werden. Der Zugwinkel $\gamma$ wird vom Reifen im Hornbereich und der Axialrichtung aufgespannt.

Tabelle 7: Felgenhornkraft durch Schlauchdruck

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Schlauchbreite | $d$ | mm | 20 | 30 | 45 |
| Luftdruck | $p$ | bar | 10 | 5 | 2,5 |
| Zugwinkel | $\gamma$ | ° | 52 | 37 | 24 |
| Zugkraft | $F_x$ | N | 314 | 353 | 398 |
| Umfanglast | $h\sigma_\varphi$ | N/mm | 10 | 7,5 | 5,6 |
| Aufweitlast | $h\sigma_\varphi \cos\gamma$ | N/mm | 6,2 | 6,0 | 5,1 |

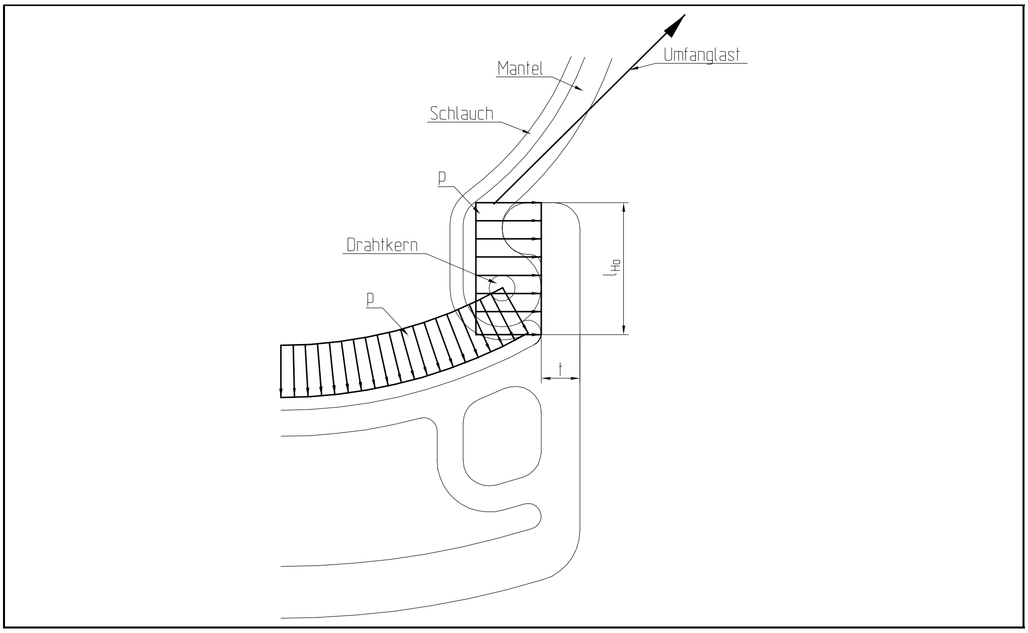


Abbildung 10: Kräfte am Felgenhorn

Aufweit- und Umfangslast wirken als Streckenlasten auf das Felgenhorn. Bei durchgebremsten Felgen tritt das endgültige Versagen meist beim Fahren über einen Kantstein oder durch ein Schlagloch ein. Dabei wird eine unwesentliche Druckerhöhung durch die Volumenreduzierung des deformierten Torusprofiles auftreten. Ausschlaggebend ist, daß sich der Zugwinkel $\gamma$ stark ändert und dadurch die wirksame Streckenlast $h\sigma_\varphi \cos\gamma$ um 9–62 % steigt. Die Anrisse können schon vorher entstehen, da durch die Aufstandskraft der Manteltorus luftdruckabhängig bei jeder Radumdrehung deformiert wird. Im Felgenhorn liegt eine Schwellbelastung vor.

Der Luftdruck übt auf das Felgenhorn ein Streckenbiegemoment aus. Dabei werden eventuelle Reifenreaktionskräfte auf den Haken nicht berücksichtigt. Im Folgenden wird die Hebellänge des Felgenhornes mit $l_{Ho} = 5,4$ mm angesetzt.

$$\frac{M_p}{\delta} = \frac{p l_{Ho}^2}{2} \tag{53}$$

Das Streckenbiegemoment durch den Reifen beträgt:

$$\frac{M_R}{\delta} = l_{Ho} h \sigma_\varphi \cos\gamma \tag{54}$$

Das gesamte Streckenbiegemoment beträgt mithin $\frac{M_R+M_p}{\delta}$.

Die Biegespannung im Hornfußpunkt ist:

$$\sigma_b = \frac{\delta \frac{M_R+M_p}{\delta}}{W_{Horn}} = \frac{6 \frac{M_R+M_p}{\delta}}{t^2} \tag{55}$$

Zusätzlich wirken die Hornaufweitkräfte als Querkräfte und damit als Schubspannungen im Felgenfuß:

$$\tau_{Horn} = \frac{h \delta \sigma_\varphi \cos\gamma + p \delta l_{Ho}}{t \delta} \tag{56}$$

Die Behauptung von Jobst Brandt, Felgen mit Hakenprofil würden nicht so stark belastet, wird hier nicht beachtet.[34] Außerdem ist der Autor von Jobst Brandts Begründung nicht überzeugt.[35]

Die Normalspannung $\sigma_n$ in der Felge durch die Kompression von Schlauchdruck und Speichenzug wird auf Seite 20 berechnet. Die Reduzierung des Felgenquerschnitts durch allmählichen Verschleiß beim Bremsen mit einer Felgenbremse wird hier nur überschlägig berücksichtigt. Sie beträgt schätzungsweise 12 mm$^2$.[36] Bei einem Anfangsquerschnitt von 123 mm$^2$ nimmt die Normalspannung um 10% zu.

Die Vergleichspannung $\sigma_v$ ist hier nach der Gestaltänderungshypothese zu berechnen.[37] Hier liegt ein ebener Spannungszustand vor.[38]

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_b^2 + \sigma_n^2 - \sigma_b \sigma_n - 3\tau_{Horn}^2} \tag{57}$$

[34] Er hat den Drahtring des Reifens mehrfach durchtrennt und dann den Schlauch auf eine Hornfelge aufgezogen und den Schlauch aufgeblasen. Im Gegensatz zur Felge ohne Hakenprofil blieb der Reifen auch bei hohen Luftdruck auf der Felge mit Hakenprofil.

[35] Integriert man den radial wirksamen Teil der Normalbelastung am Haken, so dürfte dieser ungefähr Null sein

[36] $2 \times 10 \times (1,5 - 0,9)$ mm$^2$

[37] Es liegt ein zähes, dauerbruchgefährdetes Material vor.

[38] Dauerbruchrisse entstehen an der Oberfläche

Tabelle 8: Felgenhornmomente und -spannungen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | mm | 20 | 20 | 30 | 30 | 45 | 45 |
| $p$ | bar | 10 | 10 | 5 | 5 | 2,5 | 2,5 |
| $t$ | mm | 1,5 | 0,9 | 1,5 | 0,9 | 1,5 | 0,9 |
| $\sigma_b$ | $N/mm^2$ | 128,2 | 356,0 | 105,8 | 294,0 | 83,2 | 231,0 |
| $\sigma_n$ | $N/mm^2$ | 103,7 | 114,1 | 70,8 | 87,7 | 67,8 | 74,5 |
| $\tau_{Horn}$ | $N/mm^2$ | 7,7 | 12,9 | 5,8 | 9,7 | 4,3 | 7,2 |
| $\sigma_v$ | $N/mm^2$ | 118,6 | 315,6 | 93,9 | 262 | 77,0 | 204,6 |

Die in Tabelle 2 aufgeführten Dehngrenzen von Aluminiumlegierungen zeigen deutlich die Grenze der minimalen Felgenhorndicke auf. Es sind also Maßnahmen zu treffen, damit Felgenhörner nicht durch zu geringe Materialstärken überlastet werden.

# 4 Nabenbelastung

Der Nabenkörper des angetriebenen Rades wird vorwiegend durch das Antriebsmoment belastet. Zur Berechnung der zusätzlichen Speichenbelastung, die durch das Antriebsmoment $M$ verursacht wird, sind exemplarisch zwei unterschiedliche Ansätze möglich.

1. Die Nabe wird als torsionssteif angenommen.
2. Die Federsteifigkeiten der Speichen und Nabe werden berücksichtigt.

Das Antriebsmoment pro Speichenflansch wird von $0,5z$ Speichen aufgenommen. Zu beachten ist, daß bei gekreuzten Speichungen nur $0,25z$ Speichen in Zugrichtung liegen. Jedoch übertragen die restlichen Speichen am Flansch auch das Antriebsmoment mit, da in diesen die Vorspannung abgebaut wird. Hier wird überschlägig und ohne Berücksichtigung ungleichmäßigen Tretens gerechnet.

Klumpp geht in seinem Artikel [13] auf die Möglichkeit ein, rechts mehr Speichen als links zu verwenden. Er schlägt 24/12, 24/8, 30/10... vor. Dies hätte bei außermittiger Speichung den Vorteil, daß die linken Speichen u.U. genauso stark vorgespannt werden könnten wie die rechten und mehr Moment über die rechten Speichen übertragen werden könnte. Mechanisch und von der Materialausnutzung aus gesehen wäre es mithin eine elegante Lösung. Niederflanschnaben können dann jedoch nicht verwendet werden, da in diesen nicht mehr als 18 Speichenlöcher untergebracht werden können, ohne daß diese ausreißen würden. Hier wird nicht weiter auf diese Möglichkeit zur Optimierung der Speichen- und Nabenbelastung eingegangen. Weiterhin dürfte diese Laufradbauweise durch Beschaffungslage bei Nabenschaden und Akzeptanzproblemen beim Kunden Schwierigkeiten in der Marktdurchsetzung haben.[39] Die Felge erlaubt diese Einspeichungsart, wenn sie eine hohe Seitensteifigkeit ($I_y$ muß groß sein) aufweist, da dann nicht mehr jede 2. Speiche zu einer Seite zieht. Dies wäre durch Versuche und Berechnungen zu überprüfen.

## 4.1 Vereinfachender Ansatz

Nimmt man den schlimmsten Fall an, so fährt der Fahrer mit Rad und Gepäck eine Steigung mit $k$ % hoch. Dabei wird ein Antriebsmoment $M_{Berg}$ in die Nabe eingeleitet. Hier wird eine Steigung von 20% angenommen. Kurzfristiges Beschleunigen (Anfahren, Sprint) können die gleichen Auswirkungen haben. Das Rad sei hier auf eine Niederflanschnabe 3fach gekreuzt eingespeicht.

$$\begin{aligned} M_{Berg} &= (m_{Rad} + m_{Fahrer} + m_{Gepäck})\, g \,\sin\left(\arctan\frac{k}{100}\right) r \qquad (58)\\ &= (15+75+30)\text{ kg}\, 9,81\text{ m/s}^2 \sin(\arctan 0,2)\; 0,33\text{ m} = 76\text{ Nm} \\ \Delta F_{Sp_{Berg}} &= \frac{M_{Berg}}{b\, z} = \frac{76}{0,02\cdot 36} = 106\text{ N} \qquad (59)\end{aligned}$$

[39] Es sei denn, Shimano denkt mal wieder nach und teilt dieses Nachdenken auch der PR-Abteilung mit. Dies hat bei der Parallax, deren Vorteile unten aufgedeckt werden, anscheinend nicht geklappt.

In der Ebene wirken bei einer Antriebsleistung von $P = 150$ W und einer Geschwindigkeit $v = 20$ km/h

$$\begin{aligned} M_{Ebene} &= \frac{P\,r}{v} = \frac{150 \cdot 0,33 \cdot 3,6}{20} = 8,91 \text{ Nm} \\ \Delta F_{Sp_{Ebene}} &= \frac{M_{Ebene}}{b\,z} = \frac{8,91}{0,02 \cdot 36} = 12,4 \text{ N} \end{aligned}$$

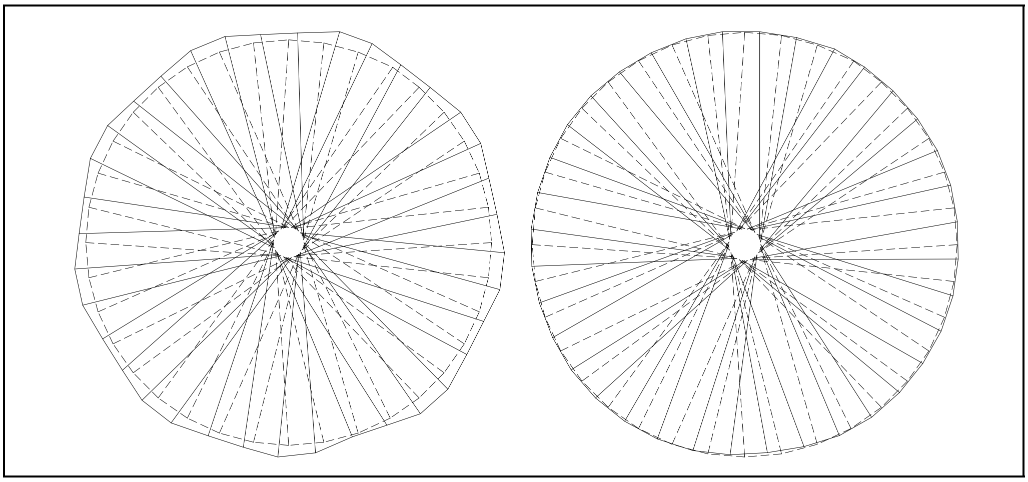

Abbildung 11: Felgenverformung durch das Antriebsmoment (fünfzigfach überhöht, links: $I_x = 245$ mm$^4$, rechts: $I_x = 2445$ mm$^4$ , $F_x = 3 \times 50$ N, $\sum F_y = 686$ N)

Die Hälfte der Speichen wird entlastet. Jeweils zwei nebeneinanderliegende Speichen werden zusätzlich belastet, die nächsten 2 Speichen entlastet. Durch die Antriebskräfte würde die Felge zu einem $z/4$-Eck deformiert, wenn das Felgenprofil nicht ein hohes $I_x$ aufweisen würde.[40]

## 4.2 Realer Ansatz

Das Antriebsmoment ($M_{Berg}$) wirke an der Nabe und werde anteilig vom rechten und linken Speichenflansch auf die Speichen und die Felge übertragen. Das Antriebsmoment der linken Seite wird zusätzlich über den torsionsweichen Nabenkörper geleitet. Die Längung einer Speiche sei $\Delta l_{Sp}$, der Verdrehwinkel der Nabe durch das Antriebsmoment $M$ ist $\varphi$ , der lotrechte Abstand zwischen Nabe und Speiche $b$.

[40] Siehe auch FE-Rechnungen von Jobst Brandt in [4]. Dies ist auch ein Grund, warum für 16-Speichenräder nur extreme Tropfenfelgen, wie die „Shamal“ von Campagnolo verwendet werden sollten.

Die Federsteifigkeit der dreifach gekreuzten Speichung auf einer Nabenseite, unter Vernachlässigung der axialen Versetzung der Speichenenden, ist:

$$c_{\varphi_{Sp}} = \frac{M}{\varphi} = b \cdot \Delta l_{Sp} c_{Sp} \frac{z}{2} \frac{1}{\varphi} \tag{60}$$

$$\Delta l_{Sp} = b \tan \varphi \tag{61}$$

$$c_{\varphi_{Sp}} = \frac{b^2 c_{Sp} z}{2} = \frac{20^2 \cdot 1830 \cdot 36}{2} = 13176 \text{ Nm/rad} = 230 \text{ Nm/Grad}$$

Für kleine Winkel gilt: $\tan \varphi = \varphi$. Der Einfluß der veränderten Speichenlänge bei unterschiedlichen Kreuzungszahlen einer Laufradgröße auf die Federsteifigkeit der Speiche ist mit -2,4...4,3% gegenüber der Änderung der Torsionsfedersteifigkeit der Einspeichung vernachlässigbar klein.[41] Ebenso kann bei allen Speichungsarten (außer Radialsp.) der Einfluß der Verdrehung infolge $c_\varphi$ auf die Zunahme von $b$ vernachlässigt werden.

Als Standardnabe wird eine vermessene New-Success von Sachs verwendet. Die Berechnung der Torsionsfederkonstante $c_\varphi$ ist im Anhang (s. S. 59) aufgeführt. Die alten Shimano MTB-Kassettennaben und immer noch produzierten Rennradnaben haben vergleichbare Torsionsfedersteifigkeiten. Ebenso dürften die Naben von Campagnolo eine Torsionsfedersteifigkeit von 80–90 Nm/° aufweisen.

Für Optimierungsversuche wird die Nabenwelle variiert. Die variierten Naben haben den gleichen Flanschabstand wie die New-Success. Das aufgeführte Materialvolumen $V$ ist nur das der Nabenhülse zwischen der Flanschen.

Tabelle 9: Geometriedaten der betrachteten Nabenwellen

| Nabe | $d_{a_{min}}$ mm | $w_{s_{min}}$ mm | $V$ $mm^3$ | $I_{t_{min}}$ $mm^4$ | $c_{\varphi N}$ Nm/° |
|---|---|---|---|---|---|
| New-Success | 16,5 | 1,75 | 8675 | 4473 | 81 |
| 30 ×2 | 30,0 | 2,00 | 8409 | 34658 | 357,8 |
| 30 ×1,5 | 30,0 | 1,50 | 6420 | 27347 | 282,5 |
| Exage | 16,5 | 2,35 | NV[42] | 5600 | 88 |
| Parallax | 27,7 | 2,55 | NV | 11508 | 138 |

Damit ergibt sich die Torsionsfedersteifigkeit der Kombination aus Nabe und Speichen zu:

$$c_\varphi = c_{\varphi_{Spr}} + \frac{1}{\frac{1}{c_{\varphi_{Spl}}} + \frac{1}{c_{\varphi_N}}} = 230 + \frac{1}{\frac{1}{230} + \frac{1}{81}} = 290 \text{ Nm/°} \tag{62}$$

Die zusätzliche Speichenbelastung durch das Antriebsmoment wird dann nach dem Freischneiden der Nabentorsionsmomente gewonnen.

[41] Ausgehend von einer 3-fach Kreuzung

[42] NV: Aufgrund der Nabenkonstruktion nicht vergleichbar

$$\sum M = 0 = M - M_l - M_r = M - c_{\varphi_r}\varphi - \frac{1}{\frac{1}{c_{\varphi_N}} + \frac{1}{c_{\varphi_l}}}\varphi \quad (63)$$

$$M_l = \frac{M}{c_{\varphi_r}\left(\frac{1}{c_{\varphi_l}} + \frac{1}{c_{\varphi_N}}\right) + 1} \quad (64)$$

$$M_r = M - M_l \quad (65)$$

$$\varphi = \frac{M}{c_{\varphi_r} + \frac{1}{\frac{1}{c_{\varphi_N}} + \frac{1}{c_{\varphi_l}}}} \quad (66)$$

$$\Delta F_{Sp_l} = \frac{2M_l}{b_l z} \quad (67)$$

$$\Delta F_{Sp_r} = \frac{2M_r}{b_r z} \quad (68)$$

Daraus folgt, daß die ohnehin schon stark vorgespannten rechten Speichen noch einen Großteil des Antriebsmomentes übertragen. Ein naheliegender Lösungsansatz zur Entlastung der rechten Speichen wäre es, dort die Kreuzungszahl zu verringern. Dies bewirkt eine geringere Torsionsfedersteifigkeit der Speichung. Da dann jedoch das Antriebsmoment verstärkt durch den mittleren Nabenteil geleitet wird, muß dieser für die auftretenden Drehmomente ausgelegt sein. Die Schubspannung im gefährdeten Nabenquerschnitt ist:

$$\tau_{max} = \frac{M_l r_{a_{min}}}{I_{t_{min}}} = \frac{M r_{a_{min}}}{\left(1 + c_{\varphi_{Sp_r}}\left(\frac{1}{c_{\varphi_{Sp_l}}} + \frac{1}{c_{\varphi_N}}\right)\right) I_{t_{min}}} \quad (69)$$

Die Werte in der folgenden Tabelle sind so berechnet, daß die linken Speichen immer 3-fach gekreuzt werden. Die Hebelarmverlängerung durch die Längung der Speichen wird bis auf die radiale (0-fach Kreuzung) vernachlässigt. Die Federsteifigkeit der radialen Einspeichung wird im Anhang auf S. 63 berechnet.

Tabelle 10: Nabenspannung und Speichenzusatzkräfte bei Naben- und Speichungsvariation

| Kreuzung (rechts) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $b_r$ | $f(\varphi)$ | 8 | 15,5 | 20 | 22 |
| $c_{\varphi_r}$ | $f(\varphi)$ | 37 | 138 | 230 | 278 |
| $c_{\varphi_l}$ | 230 | 230 | 230 | 230 | 230 |
| $l_{Sp_{622}}$ | 280 | 281 | 285 | 292 | 299 |
| New-Success | | | | | |
| $\varphi$ | 1,267 | 0,7843 | 0,3840 | 0,2622 | 0,2249 |
| $M_l$ | 75,89 | 46,98 | 23,06 | 15,71 | 13,4 |
| $M_r$ | 0,11 | 29,02 | 52,94 | 60,29 | 62,6 |
| $\Delta F_{Sp_l}$ | 210,8 | 130,5 | 64,06 | 43,64 | 37,22 |
| $\Delta F_{Sp_r}$ | 11,4 | 201,5 | 189,75 | 167,47 | 158,08 |
| $\tau_{max}$ | 140 | 86,65 | 42,53 | 28,98 | 24,72 |
| Rohr 30×2 | | | | | |
| $\varphi$ | 0,5343 | 0,42974 | 0,27353 | 0,20549 | 0,18188 |
| $M_l$ | 75,99 | 60,09 | 38,24 | 28,72 | 25,42 |
| $M_r$ | 0,01 | 15,91 | 37,76 | 47,28 | 50,58 |
| $\Delta F_{Sp_l}$ | 211 | 166,92 | 106,22 | 79,77 | 70,61 |
| $\Delta F_{Sp_r}$ | 2 | 110,48 | 135,34 | 131,33 | 127,72 |
| $\tau_{max}$ | 32,89 | 26,01 | 16,55 | 12,43 | 11,0 |
| Rohr 30×1,5 | | | | | |
| $\varphi$ | 0,60035 | 0,4649 | 0,28736 | 0,2132 | 0,1879 |
| $M_l$ | 75,99 | 58,81 | 36,36 | 26,98 | 23,78 |
| $M_r$ | 0,01 | 17,19 | 39,64 | 49,02 | 52,22 |
| $\Delta F_{Sp_l}$ | 211 | 163,36 | 101,0 | 79,97 | 66,06 |
| $\Delta F_{Sp_r}$ | 2 | 119,37 | 142,07 | 136,17 | 131,86 |
| $\tau_{max}$ | 46,17 | 32,26 | 21,74 | 26,88 | 13,04 |
| Parallax | | | | | |
| $\varphi$ | 0,8808 | 0,6166 | 0,3389 | 0,2403 | 0,2086 |
| $M_l$ | 75,97 | 53,2 | 29,2 | 20,7 | 18 |
| $M_r$ | 0,03 | 22,8 | 46,8 | 55,3 | 58 |
| $\Delta F_{Sp_l}$ | 211 | 147,77 | 81,11 | 57,5 | 50 |
| $\Delta F_{Sp_r}$ | 2,43 | 158,3 | 167,74 | 153,6 | 143,21 |
| $\tau_{max}$ | 91,43 | 64,03 | 35,14 | 24,91 | 21,66 |

Als optimal stellt sich hiernach eine Nabe mit großem Außendurchmesser und unterschiedlichen Kreuzungszahlen (rechts einfach gekreuzt, links dreifach gekreuzt) dar. Die Lastaufteilung sollte so sein, daß, wenn, eine linke Speiche versagt. Dies ist aus Wartungsgründen zu bevorzugen, da auf der linken Flanschseite ein Speichenwechsel ohne Abziehen von Zahnkranz oder Kassette vorgenommen werden kann.

Zum Vergleich können die Belastungen bei beidseitiger radialer Einspeichung mit den Daten aus der Tabelle 20 auf S. 63 bestimmt werden. Die Ergebnisse sind nahezu nabenunabhängig.[43] Es ergeben sich: $\varphi \approx 8,9°$, $M_l \approx M_r \approx 38$ Nm, $\Delta F_{Sp_l} \approx \Delta F_{Sp_r} \approx 554$ N und $\tau_{NewSuccess} \approx 70$ N/mm$^2$. Angetriebene Niederflanschnaben sind damit nicht für eine Radialeinspeichung geeignet, da das Antriebsmoment die Speichen überlastet.

[43] Einsichtig, wenn man sich die auftretenden Verdrehwinkel, Momente und Nabensteifigkeiten ansieht.

# 5 Felgeninstabilitätsberechnungen

Für die Instabilitätsrechnungen werden analytische und numerische Ansätze verwendet. Der einfachste analytische Ansatz wurden 1744 von L. Euler vorgestellt.

Elastische Instabilitätsprobleme von Tragwerken sind, mathematisch gesehen, Eigenwertlösungen der Differentialgleichungen (DGL) der Belastungssysteme. Je wirklichkeitsgetreuer die Modellierung des Problemes ist, desto schwieriger wird es, die DGL des Problemes aufzustellen und zu lösen.[44] Hier wird generell auf die Herleitung der DGL verzichtet.

Beim Kippen nimmt die Felge in der Regel die unten abgebildete Form ein. Es können sich jedoch auch höhere Eigenformen ($a$ in Formel 70 ist größer als 2) einstellen, was unter anderem von der Felgennormalkraft und der Speichung abhängt. Bei kleinen Auslenkungen kann davon ausgegangen werden, daß die Verformung auf einem Zylindermantel angenähert werden kann. Bei größeren Verformungen muß, da der Felgenumfang konstant ist, davon ausgegangen werden, daß die Verformung nicht mehr auf einem Zylindermantel stattfindet.

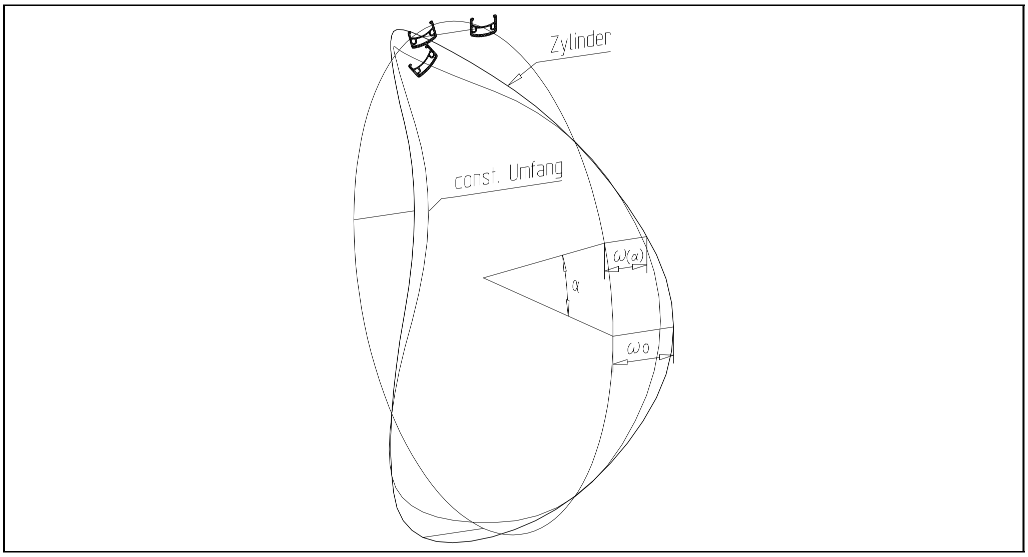


Abbildung 12: Felge mit Acht

Ein allgemeiner Biegelinienansatz der gering ausgekippten Felge kann wie folgt beschrieben werden:

$$w(\alpha) = w_0 \cos \frac{a}{\alpha} \quad (70)$$

$$q_a(\alpha) = q(w) = w(\alpha)\beta(w) \quad (71)$$

Da die Speichen die Felge wechselseitig abstützen, wird es schwierig sein eine analytische Lösung für diesen Fall zu finden. Es werden Ansätze mit und ohne Speichenabstützung

[44] Euler: DGL 2.Grades, Ratzendorfer: 4. Grades, Hencky: DGL 6. Grades

nach verschiedenen Rechenverfahren (abgewickelt, Ringform) gerechnet und mit den Ergebnissen einer FE-Rechnung verglichen.

## 5.1 Analytische Ansätze unter Vernachlässigung der Speichenabstützung

Zunächst wird die Abstützung der Speichen vernachlässigt. Hierfür werden in der Literatur zwei analytische Lösungen bereitgestellt.

### 5.1.1 Ansatz nach Euler

Der einfachste Ansatz ist, die Felge an ihrem Umfang abzuwickeln. Daraus folgt ein standardisierter Knickfall, der von Leonhard Euler analytisch gelöst und 1744 vorgestellt wurde. Die abstützenden Speichen, die Verdrillung der Felge und Einspannungsreaktionen durch die Verdrillung werden vernachlässigt.

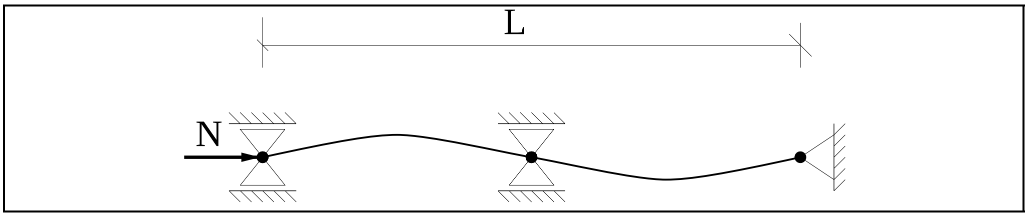


Abbildung 13: EULERscher Knickstab

Die Auslenkungen am Knickstab können die in Abbildung 14 dargestellten Zustände einnehmen. Bis zur Knicklast $N_K$ nimmt der Stab ein stabile, unverformte[45] Lage ein. Überschreitet die Last $N$ die Knicklast, so kann der Stab 2 Verformungszustände aufweisen:

1. Unausgelenkter, aber komprimierter instabiler Zustand. Aus diesem geht der Stab bei geringsten Anstößen in den 2. Zustand über. Geht er nicht in den 2. Zustand über, so versagt er bei $N_q$ durch Überschreiten der Quetschfestigkeit des Materials.
2. Ausgelenkter Zustand. Dieser Zustand ist geometrisch stabil. Überschreitet die Last $N_b$, so findet im Bereich mit der größten Spannung ein plastische Verformung statt.

[45] bis auf die Kompression

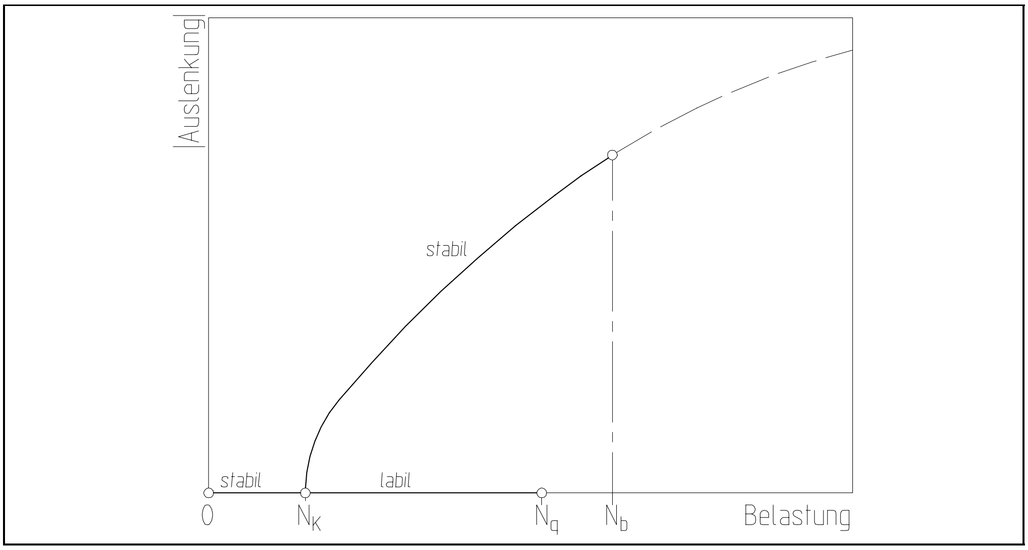


Abbildung 14: Auslenkungen am Knickstab

Um die Anwendbarkeit des Euleransatzes für diese Annahme zu überprüfen, muß der Schlankheitsgrad $\lambda$ bestimmt werden. Ist der Schlankheitsgrad größer als $\lambda_p$, so liegt elastisches Knicken vor. Sinkt $\lambda$ unter $\lambda_p$, so geht das elastische in ein plastisches Knicken über und es muß nach dem Verfahren von TETMAJER gerechnet werden. Erst bei einem Schlankheitsgrad unter $\lambda_q$ ist ein Versagen auf Druckabscherung zu befürchten.[46]

$$\lambda_{622} = \frac{l_r}{i} = \frac{0,5 l_F}{\sqrt{I/A}} = \frac{958,2}{\sqrt{8262,4/123}} = 117 \tag{72}$$

$$\lambda_{406} = \frac{l_r}{i} = \frac{625}{\sqrt{8262,4/123}} = 76 \tag{73}$$

$$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{R_p}} = \pi\sqrt{\frac{75E3}{210}} = 60 \tag{74}$$

$$R_p \approx 0,8 R_e \tag{75}$$

$$\lambda_{p_{real}} = 61 - 123 \tag{76}$$

$$\lambda_q \approx 20 \tag{77}$$

Hier muß der Wert für $I_y$ angewendet werden, da die Speichenabstützung ein radiales Ausweichen verhindert. Die Werte für $\lambda_{p_{real}}$ in (76) entstammen der Schrift von T. Domes [7]. Es kann also mit dem Ansatz nach EULER gerechnet werden. Nach [15] S. 130 ff. wird dann:

$$N_K = \alpha\frac{\pi^2 Y\, I}{l_F^2} = 4\frac{\pi^2\, 75000\ \mathrm{N/mm^2}\, 8262,4\ \mathrm{mm^4}}{1916,37^2\ \mathrm{mm^2}} = 6661,45\ \mathrm{N}$$

[46] Für Aluminium sei hier auf die Schrift von T. Domes [7] verwiesen. In der Literatur werden ansonsten nur Werte für Stähle und Hölzer angegeben.

Die Sicherheit beträgt nach dieser Rechnung:

$$\nu = \frac{N_K}{N} = \frac{6661}{12783} = 0,52 \tag{78}$$

Im allgemeinen Maschinenbau sollten die Konstruktionen so ausgelegt sein, daß die Knicksicherheit im elastischen (Euler-) Bereich ungefähr zwischen 5...10 liegt. Beim plastischen Knicken nach TETMAJER reicht ein $\nu$ von 3...8 aus. Die Felge ist nach diesem Ansatz überkritisch belastet.

Berücksichtigt man die Möglichkeit des Biegedrillknickens, so sind für dünnwandige Querschnitte die 3 Lösungen der DGL nach Szabó [27] (S. 332 ff.) :

$$N_1 = \frac{\pi^2 \bar{Y} I_x}{l^2} \tag{79}$$

$$N_2 = \frac{\pi^2 \bar{Y} I_y}{l^2} \tag{80}$$

$$N_3 = \frac{\pi^2 \bar{Y} C_M}{l^2 i_p^2} + \frac{G I_t}{i_p^2} \tag{81}$$

Für die Definierung von $\bar{Y}$ vergl. Seite 13. In der Formel (81) überstreicht Szabó $C_M$ und nicht $Y$, hier dürfte bei ihm ein Druckfehler vorliegen. Ausknicken nach (79) kommt auf Grund der radialen Speichenabstützung nicht Infrage. Es sind also (80), die oben schon betrachtete Eulerformel (mit $\alpha = 1$ und $l = 0,5 l_F$), und (81) unter Berücksichtigung des Wölbwiderstandes (vergl. Tabelle 1) maßgeblich.

Tabelle 11: Biegedrillknickenlasten der Felgen

| Felge | 2317 | 917 | Stehno | Schürmann | Schürmann | RM400 Pro | Variation 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radius | 311 | 311 | 280 | 311 | 203 | 311 | 311 |
| $N_2$ | 9874 | 8074 | 6756 | 9231 | 21667 | 6176 | 7973 |
| $N_3$ | 684590 | 570802 | 507154 | 111286 | 112786 | 290972 | 1408403 |

Die Gefahr des Biegedrillknickens liegt also beim Ansatz als Knickstab nach Euler damit nicht vor, die Felge würde zuerst ohne Drillung ausknicken. Roik verwendet in den Formeln 79–81 in [23] den normalen E-Modul $Y$ und nicht $\bar{Y}$.

### 5.1.2 Ansatz nach Hencky

H. HENCKY beschrieb 1921 in der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" (ZAMM) [9] eine analytische Lösung für das Knicken von Kreisringen unter Außendruck senkrecht zur Stabebene. Dort kommt Hencky auch zu der Schlußfolgerung, daß ein realer Ring eher aus der Stabebene herauskippt als daß er in der Ebene „einbeult".[47]

[47] Wird hier zusätzlich durch die radial steifen Speichen behindert.

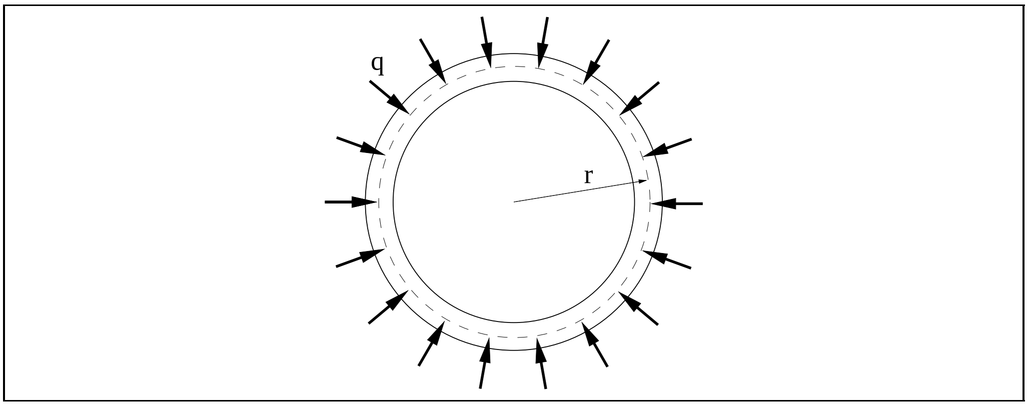


Abbildung 15: Kreisring unter Streckenlast

Unter Vernachlässigung der axialen Speichenabstützung[48], aber mit Berücksichtigung der Torsion des Querschnittes und damit des Drillmomentes ergibt sich die kritische Last nach der Schreibweise HENCKYs zu:

$$\lambda = \frac{\text{Biegungssteifigkeit}}{\text{Torsionssteifigkeit}} = \frac{YI}{GI_t} \tag{82}$$

$$\omega = \frac{12}{4+\lambda} \tag{83}$$

$$N_K = \omega \frac{YI}{r^2} \tag{84}$$

Das Trägheitsmoment $I$ ist senkrecht zur Stabebene anzusetzen ($I_y$ in der Tabelle 1 auf S. 8). Typische Hohlkammerfelgen weisen ein niedriges $\lambda$ auf, so daß bei einer geringfügigen Vergrößerung der Torsionssteifigkeit $\omega$, und damit $N_K$ stark ansteigen. Vergleiche dazu Abbildung 16 und Tabelle 12.

[48] Die Speichenabstützung wird ansatzweise dadurch berücksichtigt, daß die Kraft die Richtung durch den ursprünglichen Kreismittelpunkt beibehält. Bei Beibehaltung der ursprünglichen Lastrichtung ist nach A. Pflüger [21] der Faktor 9 statt 12 zu verwenden

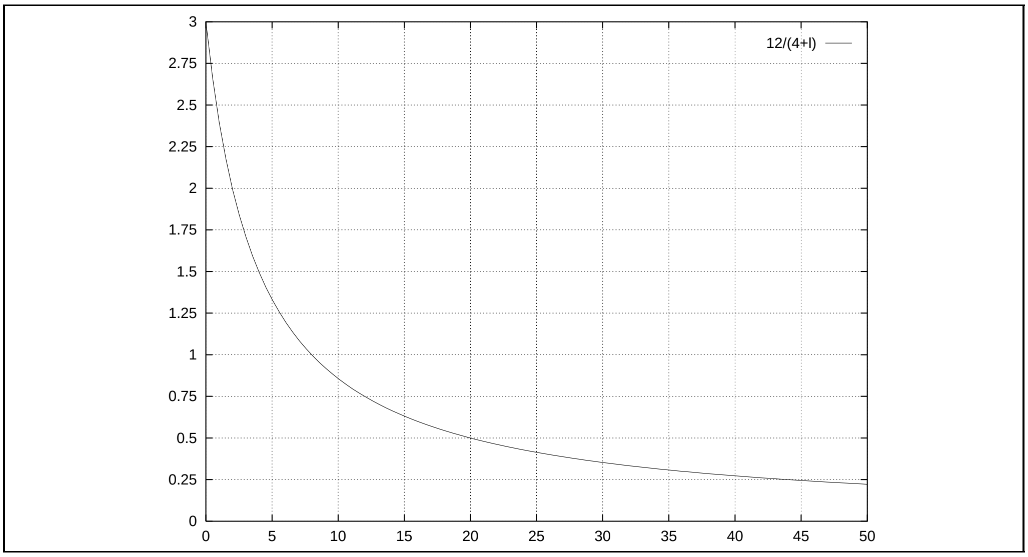


Abbildung 16: Abhängigkeit von $\omega$ von $\lambda$

Mit den bekannten Felgenkennwerten aus der Tabelle 1 ergeben sich folgende Knicklasten nach HENCKY:

Tabelle 12: Knickdaten von Felgen nach HENCKY

| Felge | 2317 | 917 | Stehno | Schürmann | Schürmann | RM400 Pro | Variation 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radius | 311 | 311 | 280 | 311 | 203 | 311 | 311 |
| $\lambda$ | 10,5 | 9,8 | 8,3 | 52,4 | 52,4 | 17,1 | 3,41 |
| $\omega$ | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 0,2 | 0,2 | 0,6 | 1,62 |
| $N_K$ | 5129 | 4548 | 4387 | 1198 | 2811 | 2275 | 8370 |
| $\nu$ | 0,40 | 0,35 | 0,36 | 0,09 | 0,11 | 0,18 | 0,65 |

Nach HENCKY sind die Knicklasten, trotz Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit, sogar geringer als die nach EULER.

## 5.2 Analytische Ansätze unter Berücksichtigung der Speichenabstützung

Die Speichen stützen die Felge seitlich ab. Sie erschweren das seitliche Ausweichen der Felge. Kein analytischer Ansatz berücksichtig, daß die Speichen abwechselnd nach links und nach rechts ziehen. Die meisten Ansätze „verschmieren“ die einzelnen Stützen zu einer gleichmäßigen Abstützung. Dies wird jedoch in der Realität dazu führen, daß beim Überschreiten der Knicklast die Felge ausknicken wird, da die Speichen abwechselnd ziehen und in keinem Laufrad alle Speichen die gleiche Spannung aufweisen. Beim Ausknicken wird der Zug der Drahtringe im Mantelwulst eine hier nicht betrachtete Rückstellkraft ausüben.

### 5.2.1 Ansatz nach Ratzendorfer

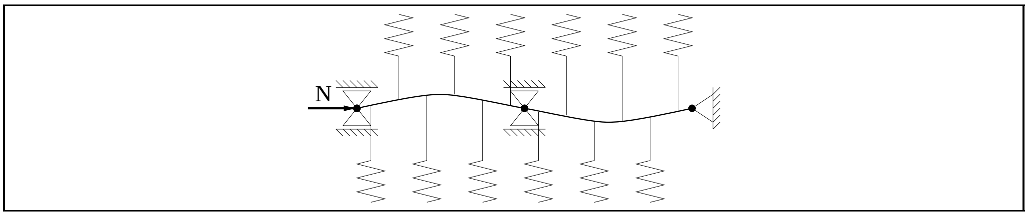


Abbildung 17: Federunterstützter Eulerstab

Dieses Verzweigungsproblem wird von Pflüger [21] auf S. 374 behandelt. J. Ratzendorfer publizierte diese erweiterte Eulerformel in „Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken“ 1936 in Wien. Erste Veröffentlichungen zu diesem Lastfall erschienen 1905 von Zimmermann [30]. Auf den hier benutzten Fall übertragen lautet der Zusammenhang dann mit $l = 0,5 l_F$:

$$\begin{aligned} P_K &= \left(n^2 + \frac{\beta l^4}{n^2 \pi^4 Y I}\right) \pi^2 \frac{EI}{l^2} = \varphi_{36}\, \pi^2 \frac{Y I}{l^2} \\ &= \left(n^2 + \frac{0,46 \cdot 958,2^4}{n^2\, \pi^4\, 75\mathrm{E}3 \cdot 8262,4}\right) \pi^2 \frac{75\mathrm{E}3 \cdot 8262,4}{958,2^2} \end{aligned} \tag{85}$$

Maßgeblich ist die Halbwellenzahl $n$, die das kleinste $P_K$ ergibt.

Der Faktor $\varphi_{36}$ ist der Abbildung 23 im Buch von Pflüger [21] zu entnehmen. Näherungsweise gilt:

$$\varphi_{36} \approx \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\beta\, l^4}{E\, I}} = \frac{2}{\pi^2} \sqrt{\frac{0,46 \cdot 958,4^4}{75000 \cdot 8262,4}} = 4,79 \tag{86}$$

Bürgermeister et al. geben in [5] eine weitere Näherungslösung an:

$$P_K = 2\sqrt{Y I \beta} \tag{87}$$

Tabelle 13: Knicklasten beim Balken auf elastischer Bettung

| Methode | n | Last |
|---|---|---|
| Halbwellenzahl | 1 | 49454 |
| | 2 | 37343 |
| | 3 | 64706 |
| | 4 | 109254 |
| $\varphi_{36}$ | | 31892 |
| Bürgerm. et al. | | 33766 |

Nach dieser Rechnung wäre also eine Sicherheit von:

$$\nu = \frac{P_{K_{min}}}{N} = \frac{37343}{12783} = 2,9 \tag{88}$$

gegeben. Die Speichenabstützung erhöht die Knicklast gegenüber dem EULERansatz erheblich.

### 5.2.2 Kreisring auf elastischer Bettung

Bisher wurde kein analytisch gerechneter Fall gefunden.

## 5.3 FE-Modell

Da für diesen speziellen Fall keine analytische Lösung gefunden wurde und nicht beabsichtigt ist, selber eine Lösung herzuleiten, wird eine Rechnung mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente vorgenommen.

Hier wird das Modell mit dem FE-Pre/Postprozessor `MENTAT` erstellt und mit dem FE-Solver `MARC` berechnet. `MARC` ist ein Finite Elemente Programm zur Behandlung von linearen und nichtlinearen Problemen, insbesondere der Strukturmechanik. `MARC` wird in der Version K6.3 und `MENTAT` in der Version 2.3.0 verwendet.

### 5.3.1 Verifizierung der Rechengenauigkeit

Um Anhaltswerte für die Rechengenauigkeit der `MARC`-Rechnungen zu erhalten, wird der Eulersche Knickstab, für den eine analytische Lösung (s. S. 33) exisitiert, berechnet.

Wird das auf Seite 65 abgedruckte FE-File mit `MARC` gerechnet, so ist ab einer Normalkraft von ca. 6370 N die Steifigkeitsmatrix ($\overline{\overline{S}}$) in Element 21 nicht mehr positiv definit[49].[50] `MARC`berechnet in jedem Schritt ein Singularitätsverhaltnis. Dies weist an der kritischen Knicklast $N_K$ des Systemes ein Minimum auf. Nach Euler ist ein Ausknicken bei 6661 N zu erwarten. `MARC` rechnet in diesem Vergleichsfall also mit einem Fehler von -4,5%. Der Knoten 1 entspricht dem rechten Knoten in Abbildung 13, der Knoten 21 dem linken Knoten. Das mittlere Lager ist am Knoten 11 plaziert. Die Abbildung 18 zeigt das Singularitätsverhältnis $\sigma$ als Funktion der Normalkraft.

Der Elementtyp 52 ist ein gerader, dreidimensionaler Balken nach der Euler-Bernoulli Formulierung. Er hat linearelastische Eigenschaften. Die lokale z-Achse läuft vom ersten zum zweiten Knoten. Für den Elementtyp 52 kann der Torsionsteifigkeitsfaktor $K$ verschieden von $I_p = I_x + I_y$ angegeben werden.

[49] Eine Matrix ist positiv definit, wenn sämtliche Eigenwerte $> 0$ sind.

[50] Eine Matrix $\overline{\overline{M}}$ ist singulär, wenn ihre Inverse $\overline{\overline{M}}^{-1}$ nicht existiert. Die Inverse existiert, wenn die Determinate der Matrix $\left|\overline{\overline{M}}\right| \neq 0$ ist, die Zeilenvektoren linear unabhängig sind und eine Basis der $n$-dimensionalen Matrix bilden.

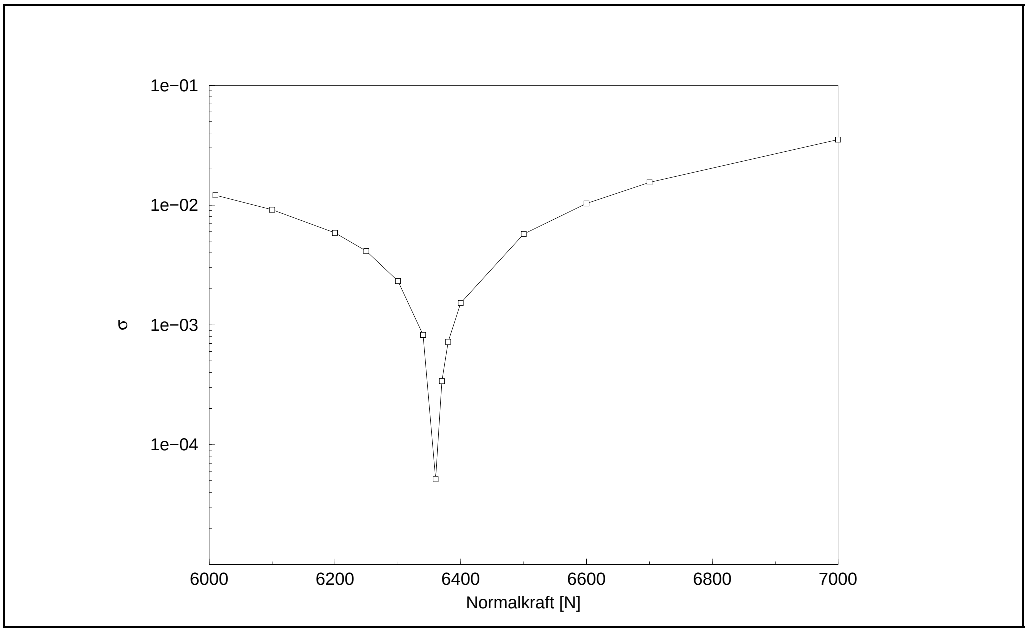


Abbildung 18: Singularitätsverhältnis der Steifigkeitsmatrix des Eulerstabes

Nach der Beschreibung im `MARC`-Element Library kann der Elementyp 52 für nichtlineare Rechnungen wie große Verformungen und Knicken verwendet werden. Der hier ermittelte Fehler ist nur ein Anhaltswert, da das Lösungsverfahren bei anderen Geometrien teilweise sehr große Abweichungen zu analytischen Lösungen berechnet.[51]

### 5.3.2 Modellierung

Zur Testmodellierung wird der Felgenquerschnitt mit 82 4-knotigen Schalenelementen versehen und dann zum torusförmigen Felgenquerschnitt extrudiert. Dabei entstehen 5904 achtknotigen Quader mit einer Gesamtknotenzahl von ca. 10500. Aufgrund der damit zu erwartenden Rechenzeit wird von einer Berechnung und weiteren Verfeinerung abgesehen. Stattdessen wird ein Modellierungsansatz mit 2-knotigen Elementen (Typ 52 "thin elastic beam"), am Umfang mit 72 Elementen und 36 Elemente für die Speichen, weiterverfolgt. Das Modell hat also 108 Knoten und ist gegenüber dem zuerst angestrebten Modell handhabbar.[52] Außerdem können durch einfaches Abändern der Querschnittskennwerte im `MARC`-Eingabefile die Berechnungen von unterschiedliche Felgentypen und Speichendurchmesser durchgeführt werden.

[51] Vergleichsberechnungen des Arbeitsbereiches Schiffstechnische Konstruktion am Beulverhalten von Plattensegmenten von Schiffsstrukturen haben teilweise 100% Abweichung zwischen analytischen und numerischen Lösungen ergeben.

[52] Rechenzeiten auf einer HP 715/75-Workstation mit 64 MB Hauptspeicher ca. 50–60 Sekunden

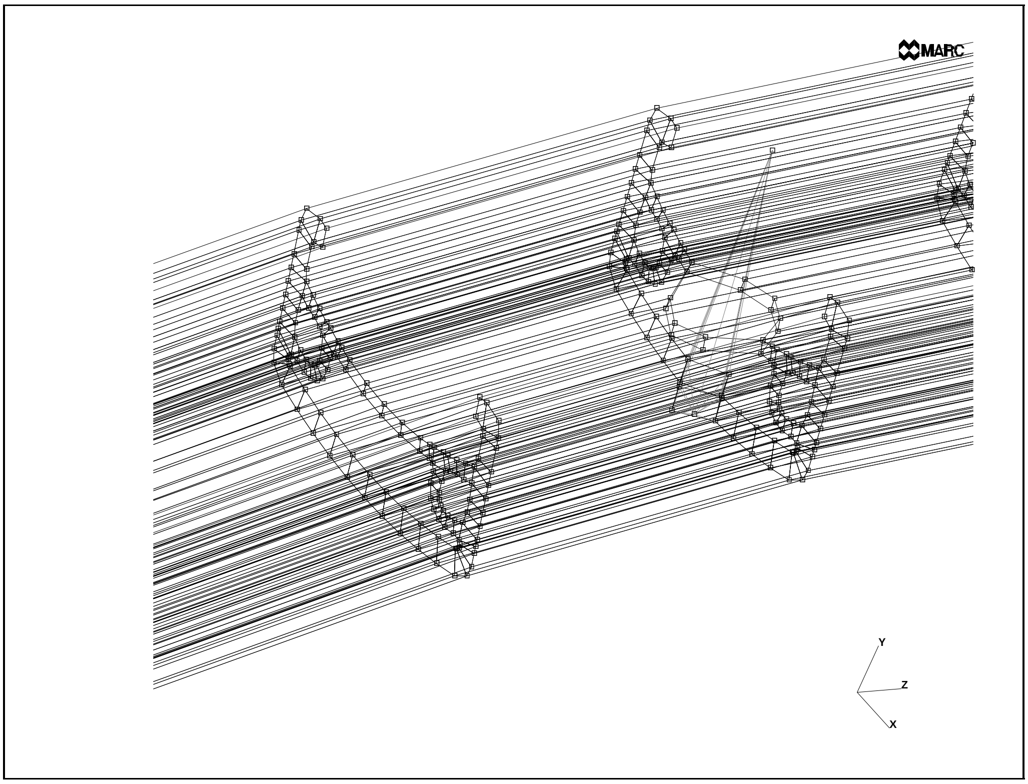


Abbildung 19: Testmodellierung

Daraus folgt, daß folgende Unstetigkeiten in der Felge unberücksichtigt bleiben:

**Nippellöcher:** Auf Grund der dicken pulverigen Oxidschicht unter dem Ösentopf der doppeltgeösten Weinmannfelge kann davon ausgegangen werden, daß die Speichenzugkraft nur vom nabennächsten Loch auf die Felge übertragen wird. Das innere (Nippelsitz-) Loch hat einen Durchmesser von 4,5 mm, das äußere 9 mm.

Hier wird keine FE-Rechnung der Spannungsverteilung im Nippelbereich vorgenommen.

**Felgenstoß:** Ein mögliches Klaffen des Felgenstoßes wird in dieser Modellierung vernachlässigt. Da die meisten Felgenstöße mit zwei Stiften in den Seitenkammern verbunden sind, kann man davon ausgehen, daß sowohl Rotation wie Translation übertragen werden. Auf Grund der Vorspannung sei die Normalkraft immer größer als Null, das heißt, daß kein Abheben stattfindet und Biegemomente auch übertragen werden.

**Ventilloch:** Ein möglicher Einfluß durch das Ventilloch wird trotz des relativ großen Durchmessers von 7 mm vernachlässigt.

Diese Unstetigkeiten sind nur für die Rißausbreitung und Dauerfestigkeit in den genannten Bereichen interessant; für eine elastische Verformung beim Auskippen können diese geometrischen Einflußfaktoren in erster Näherung vernachlässigt werden.

### 5.3.3 Randbedingungen

Das verwendete Koordinatensystem ist ein kartesisches. Die Felge liegt in der $xy$-Ebene. Entgegen der bisherigen Konvention bei Laufrädern liegt der linke Flansch auf $z = -20$ mm und der rechte Flansch auf $z = 40$ mm.

**Materialzuweisung** Die 72 Elemente am Rand erhalten die Materialkennwerte von Aluminium und die Querschnittswerte der Weinmannfelge „3217“. Die 36 Speichen ($Y = 210000$ N/mm$^2$) werden mit einem Durchmesser von 1,8 mm versehen. Die Wärmeausdehnungskoeffizienten der Speichen werden auf $\alpha_{links} = 0,002$ und $\alpha_{rechts} = 0,0024$ gesetzt.

**Festlegung** Die Knoten, an denen die Speichen in Nabennähe aufgehängt sind, werden festgelegt (kein Freiheitsgrad). Alle anderen Knoten sind nicht festgelegt.

**Spannungsaufbau** Die Speichenvorspannung wird durch das Abkühlen der Speichen bewirkt. Dabei verkürzen sich die Speichen und üben auf die Felge eine Zugkraft aus. Um die Vorspannungen von 1200 bzw. 600 N zu erzielen ist darauf zu achten, daß die Speichen unterschiedlich abgekühlt werden müssen. Zum Abgleich der Federsteifigkeit der unterschiedlichen Speichenlängen werden die Ausdehnungskoeffizienten experimentell so gewählt, daß die Felge bei den anfänglich stabilen Belastungen nur eine unbedeutende Axialverschiebung ausführt.

MARC kann nur mit großem Aufwand nicht parallel zu den Achsen des kartesischen Koordinatensystemes ausgerichtete verteilte Streckenlasten auf 3-dimensionale Balken aufbringen.[53] Daher wurde ein vereinfachender Weg gewählt. Die Felgenbelastung durch den Schlauchdruck wird auf die 72 Felgenknoten aufgeteilt. Dadurch müssen für 72 Knoten die Lastwinkel berechnet werden. Als effektive Knotenlast werden 515 N angesetzt, was einer Streckenlast von 1030 N/Segment oder 19,67 N/mm bei 10 bar entspricht.

Das Belastungszenario ist wie folgt aufgebaut:

1. Die Speichenvorspannung wird durch das Abkühlen der Speichen aufgebracht.
2. Die 72 Randknoten werden bei Beibehaltung der Temperatur belastet. Die Normalkraft in der Felge steigt an, die Speichenspannung wird abgebaut.
3. An den Knoten 7, 41 und 42 wird die Felge mit einer axial gerichteten Kraft (in $z$-Richtung) belastet. Nach Messungen des Arbeitsbereiches KT II an der TU-HH ist beim Wiegetritt mit Seitenführungskräften von ca. 200 N zu rechnen, im Geländeeinsatz von Mountainbikes können 600 N auftreten. Hierdurch wird die Felge axial verformen oder sogar ausgekippen.

[53] Hierzu wird die User-Subroutine FORCEM benutzt.

### 5.3.4 Rechenergebnisse

Die aufgeführten Kräfte liegen jeweils in den 1. Elementkonten der Elemente 1 (linke Speiche), 2 (rechte Speiche und 37 (Felge) vor.

Um die kritische Kipplast der nur durch Speichen vorgespannten Felge zu bestimmten wurde teilweise vom vorgestellten Belastungsszenario abgewichen. Die linken Speichen werden je Schritt um 0,28571 °C und die rechten um 0,14288 °C abgekühlt. Dies entspricht dem Auskippen der Felge im idealen Zustand mit gleich gespannten Speichen und ohne Schlauchdruck und Seitenführungskraft. Die aufgeführten Schritte sind diejenigen, bei denen gerade noch nicht „nicht pos. def.“ Einträge errechnet werden.

Tabelle 14: Kritische Normalkräfte bei reinem Abkühlen

| Felge | Schritt | Speichenkraft links/rechts | Felgennormalkraft |
|---|---|---|---|
| 2317 | 20 | 4802/2417 | 19575 |
| 2317, geschlitzt | 17 | 4081/2056 | 17516 |
| Schürmann | 14 | 3354/1688 | 14392 |
| Variation 1 | 26 | 6643/3450 | 28801 |

Mit gleichmäsig gespannten Speichen kann aufgrund der Bruchkraft der Speichen von max. 3 kN also nicht eine Felge soweit vorgespannt werden, daß sie knickt. Dafür müssen auf den Zentrierständer schon starke und ungleichmäßige Speichenspannungen vorliegen.

Das vorgestellte Szenario wurden nur mit der 2317 durchgeführt.

Die linken Speichen wurden eine bestimmte Anzahl (5,6,7,8,9 und 14) Schritte um jeweils 0,28571 °C und die rechten um 0,14288 °C abgekühlt. Auf die so vorgespannte Felge wurde der Schlauchdruck von äquivalent 10 bar aufgebracht. Danach wurden die Knoten 7, 41 und 42 jeweils mit einer Seitenführungskraft (Sprunglast in Tabelle 15) belastet. In Versuchen wurde die Seitenführungskraft soweit variiert, daß die Last, bei der ein Sprung in der maximalen Axialverschiebung erkennbar war, eingrenzbar war. Das von `MARC` ausgegebene Singularitätsverhältnis war nicht mehr aussagekräftig.

Tabelle 15: Kritische Normalkräfte bei Berücksichtigung von Luftdruck und Seitenführungskraft

| Abkühl- | Speichenkraft | | Normalkraft | | Sprunglast | Sprunggröße |
|---|---|---|---|---|---|---|
| schritte | n. Abk. | n. Luftd. | n. Abk. | n. Luftd. | [N] | [mm] |
| 5 | 1200/604 | 890/400 | 5152 | 9613 | 67,5 | 1,54 |
| 6 | 1440/725 | 1131/520 | 6182 | 10643 | 73,4 | 2,37 |
| 7 | 1680/846 | 1372/640 | 7213 | 11673 | 88,25 | 0,70 |
| 8 | 1920/967 | 1612/759 | 8243 | 12702 | 74,0 | 7,81 |
| 9 | 2160/1088 | 1853/879 | 9274 | 13732 | 70,29 | 8,80 |
| 14 | 3361/1962 | 3056/1479 | 14425 | 18881 | 17,9 | 18,90 |

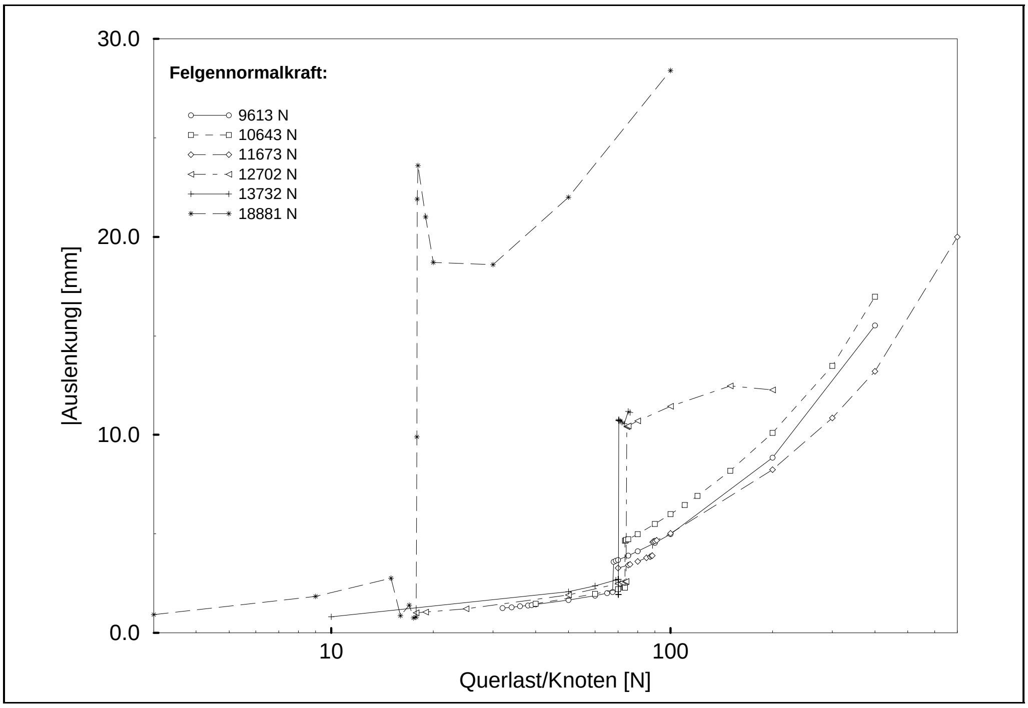


Abbildung 20: Knicklasten der eingespeichten Felge

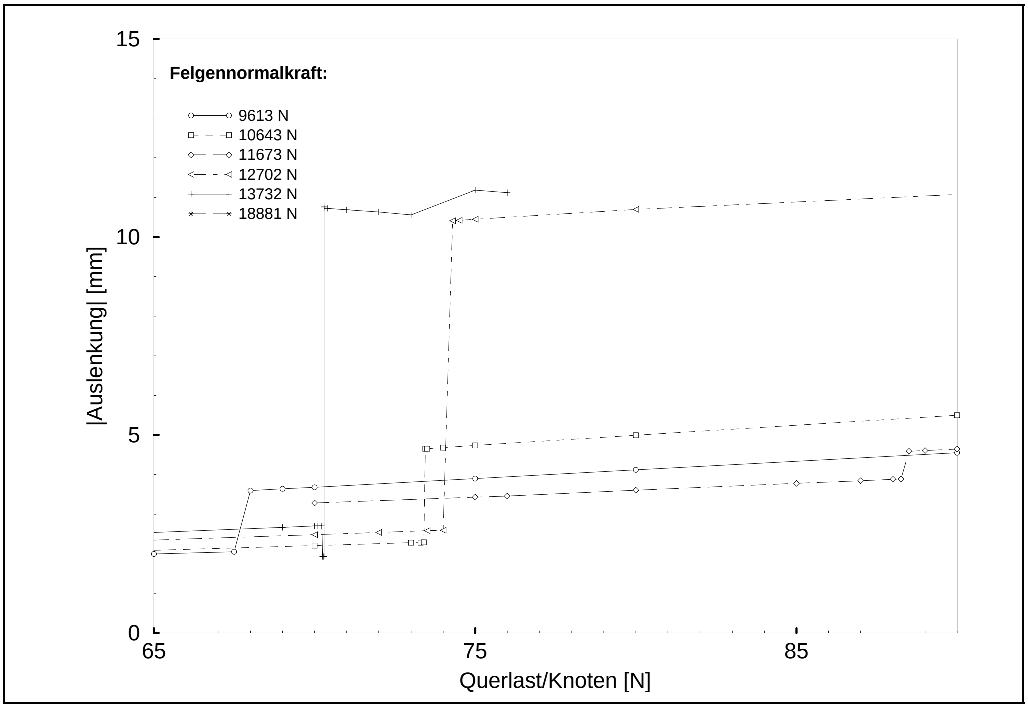


Abbildung 21: Knicklasten der eingespeichten Felge (Ausschnitt)

Wird die Felge mit einer Speichenvorspannung von 1440/725 N und 10 bar Luftdruck versehen, so nimmt sie bei einer Seitenführungskraft von 3×300 N die in Abbildung 22 abgebildete Form ein.

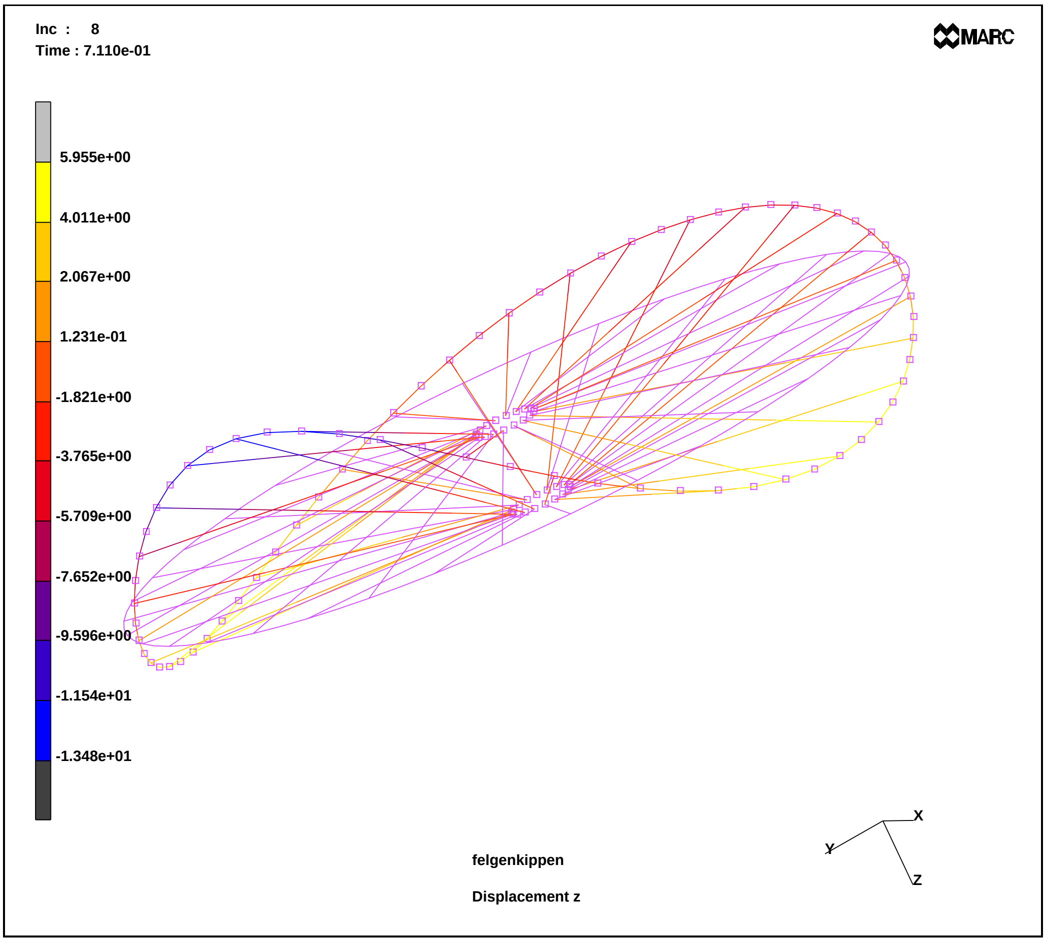


Abbildung 22: Verformung bei 1440 N Speichenvorspannung, 10 bar, 3×300 N Axialkraft

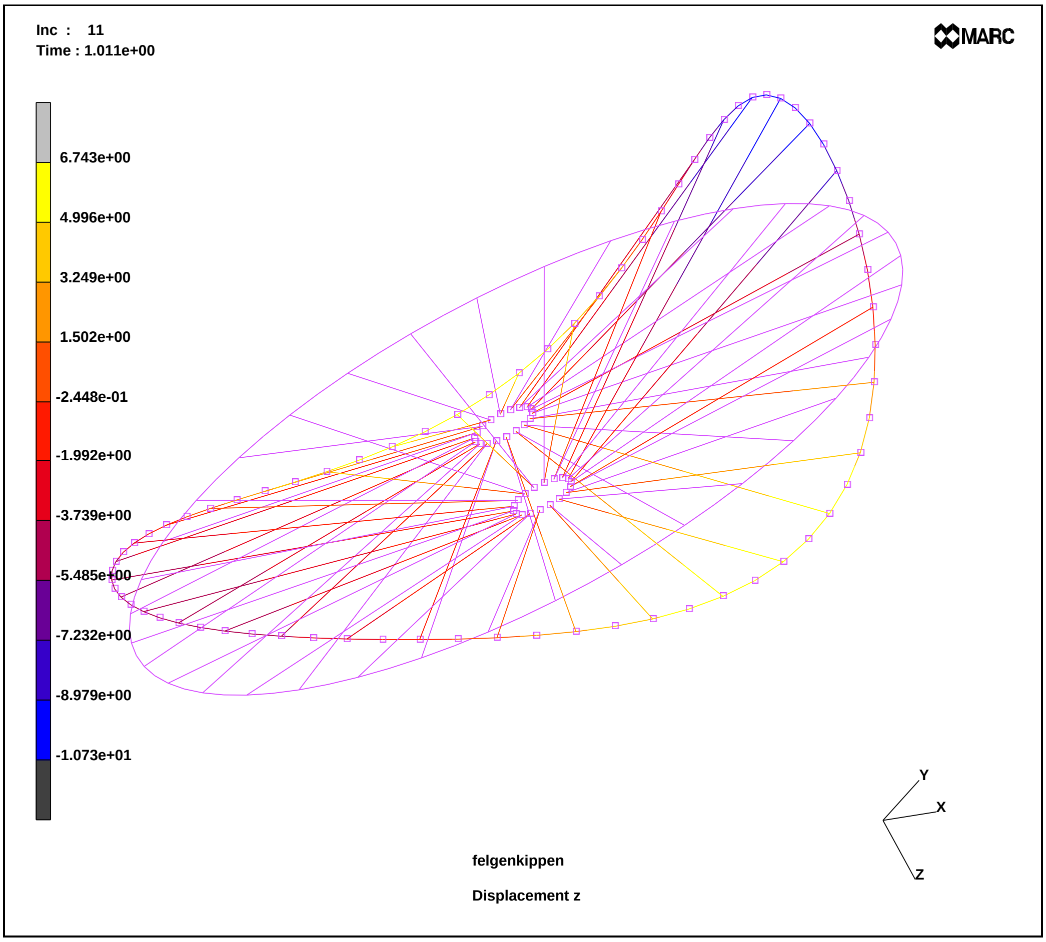


Abbildung 23: Verformung bei 2160 N Speichenvorspannung, 10 bar, 3×70,291 N Axialkraft, 10fach überhöht

Die von MARC berechnete 7. Eigenform stellt sich in Abbildung 24 da.

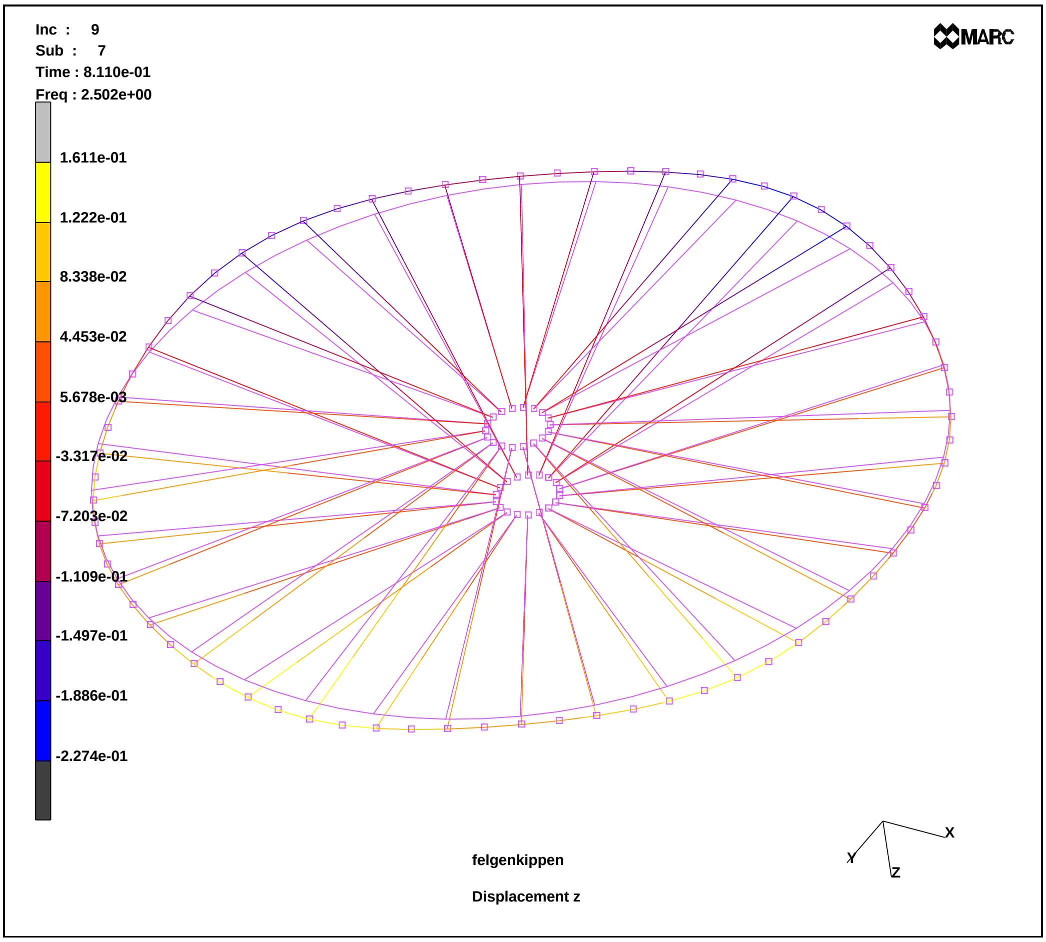


Abbildung 24: Verformung bei 1680 N Speichenvorspannung, 10 bar, 3×80 N Axialkraft

Wird auf die Felge ohne das erste Abkühlen der Speichen sofort der Außendruck aufgebracht, so treten die ersten nicht pos. def. Einträge in $\overline{\overline{S}}$ schon bei einer Normalkraft in der Felge von ca. 1500 N auf. Dies liegt daran, daß die Speichen die Felge nicht abstützen, sondern selber ausknicken. Die Knicklast einer Speiche liegt bei ca. 13 N.

# 6 Ergebnisse

Unter Berücksichtigung der hier teilweise stark theoretischen und vereinfachenden Belastungsannahmen können folgende Ergebnisse aus den Berechnungen abgeleitet werden. Diese Ergebnisse werden teilweise durch fremde und eigene Erfahrung in der Realität bestätigt.

## 6.1 Felgenhornbelastung

Werden Fahrradmäntel mit dem normalen Luftdruck gefahren, so sind die Belastungen des Felgenhornes von der Deckenbreite nahezu unabhängig. Bei einer Felgenhorndicke von 0,9 mm liegen folgende Vergleichspannungen im Horn vor:

| Mantelbreite | Schlauchdruck | Vergleichsspannung |
|---:|---:|---:|
| 20 mm | 10 bar | 315 $N/mm^2$ |
| 30 mm | 5 bar | 260 $N/mm^2$ |
| 45 mm | 2,5 | 205 $N/mm^2$ |

Diese Vergleichspannungen sind für die meisten Aluminiumlegierungen eindeutig zu hoch. Außerdem sind diese Spannungen die unteren Werte, die sich durch das Deformieren des Manteltorus im Fahreinsatz noch erhöhen.

## 6.2 Nabenbelastung

Fahrradnabe und -speichen werden besonders an starken Steigungen und beim Anfahren belastet. Die weitestverbreitete Kombination aus einer schlanken Nabe und 3-fach gekreuzten Speichen wird bei 76 Nm Antriebsmoment mit 167/43 N (rechts/links) für die Speichen und einer Schubspannung von 28 $N/mm^2$ belastet. Wird die Torsionsfedersteifigkeit des Nabenkörpers erhöht und die Speichung auf der Zahnkranzseite durch eine Verminderung der Kreuzungszahl verringert, so können die dauerbruchgefährdeten Speichen auf der Zahnkranzseite deutlich entlastet werden, ohne den Nabenköper zu überlasten. Wird die Nabenhülse als Alurohr 30×2 mm ausgeführt und die rechte Seite 2-fach gekreuzt eingespeicht, ergeben sich 135/106 N und 16,55 $N/mm^2$.

Radialeinspeichungen sind nur für nichtangetriebene Laufräder mit Felgenbremsen zulässig. Ein radial eingespeichtes 28”-Rad mit 76 Nm Antriebsmoment belastet die Speichen zusätzlich zur Vorspannung mit 554 N.

## 6.3 Felgeninstabilität

Die analytischen Knicklasten sind im Rahmen ihrer Theorie fest. Die FE-Rechnungen mit `MARC` benötigen teilweise eine zu variierende Querlast, die ein Auskippen verursacht. Dieses Auskippen findet bei einer gesamten Seitenführungskraft von ca. 201–222 N statt.

Aber erst bei einer Felgennormalspannung von ungefähr 12000 N findet mit ca. 7 mm ein geometrisch bedeutendes Auskippen statt.

Die folgende Tabelle stellt die Lösungen der verschiedenen Ansätze zur Instabilitätsrechnung gegenüber.

| Rechenverfahren | Knicklast |
|---|---:|
| Euler | 6661 N |
| Hencky | 5129 N |
| Ratzendorfer | 37343 N |
| `MARC` | ≈10000–12000 N |

Man kann also nicht mit den stark vereinfachenden analytischen Ansätzen rechnen. Fahrradspeichenräder werden in knickgefährdeten Belastungsbereichen benutzt. Daß Felgen relativ selten Auskippen kann daran liegen, daß der Fahrer bei merklichen Veränderungen des Fahrverhaltens unbewüßt das Laufrad entlastet. In extremen Situationen ist aber durchaus mit einem elastischen Kippen zu rechnen.

# 7 Schlußfolgerungen

Die Spannungen in der Felge durch Speichenspannung und Luftdruck sind bedeutend größer als die, die durch normale Fahrbelastungen hervorgerufen werden.

Um ein Auskippen von Fahrradfelgen zu vermeiden kann man folgende Maßnahmen ergreifen:

- Steife Felgen (Hohlkammer, breit und mit dicken Flanken) verwenden
- Kleine Laufräder verwenden. Dadurch wird die Knicklänge verringert und die Speichen können bei gegebenem Nabenflanschabstand die Felge besser abstützen.
- Naben mit weit auseinanderliegenden Flanschen verwenden
- Felge mittig zu den Speichenflanschen zentrieren
- Felge nicht zu hart einspeichen (Zielkonflikt)

Fahrbelastungen können maximal als der sprichwörtliche „Tropfen, der das Faß zum Überlaufen bringt“ angesehen werden. Bedeutend sind die Einhaltung einer gleichmäßig verteilten Speichenkraft und mäßigen Luftdruckes. Geringer Luftdruck widerspricht aber dem Ziel, einen geringen Rollwiderstand zu erzielen; dies ist also ein Zielkonflikt. Und bei zu geringer Speichenspannung bekommen Laufräder schnell eine „Acht“; was auch ein Zielkonflikt ist, da die Felge nicht zu stark vorgespannt werden darf.

Die Betrachtung der Felgenhornbelastung legt nahe, die Mindestdicke des verschlissenen Felgenhornes mit mindestens 1 mm zu kennzeichnen. Unter dieser Stärke ist dringend ein Austauschen der Felge anzuraten. Da heute die meisten Felgenhörner mit Haken versehen sind, ist ein einfaches Ausmessen der Horndicke nur mit speziellen Meßwerkzeugen möglich. Der Felgenhersteller kann die Mindestaußenbreite der Felge dauerhaft auf dem Typenschild kennzeichnen. Da Felgen in der Regel auf beiden Seiten gleichmäßig verschleißen, könnte der Verbraucher diese dann jederzeit mit einem Meßschieber überprüfen.

Die Zusatzbelastung der Speichen durch das Antriebsmoment kann durch eine torsionssteife Nabe und unterschiedliche Kreuzungsarten deutlich minimiert werden. Ebenso sollte bei angetriebenen Laufrädern eine Hochflanschnabe verwendet werden.

Besonders bei leichten Felgen und hohem Luftdruck sind elastische Speichen mit einer hohen Speichenvorspannung anzustreben, da durch den Luftdruck die Speichenvorspannung besonders bei steifen Speichen gemindert wird.

# A Speichenkraftmeßgerät

Schwierigkeiten in der theoretischen Berechnung der Speichenkraft machten den Einsatz eines Speichenkraftmeßgerätes notwendig. Da diese Meßgeräte zwischen 600–1300 DM kosten und Anfangs weder die TU noch bekannte Fahrradhändler hier über Meßgerät verfügten, mußte ein Meßgerät selber gebaut werden.[54]

Prinzipiell kann man praktisch (ohne großen Aufwand) mit zwei Methoden die Speichenspannung messen:

- Die Speiche wird statisch belastet und die Durchsenkung gemessen
- Die Speiche wird angezupft und die Spannung aus der Frequenz der sich einstellenden Eigenschwingung berechnet. Mit einem PC, einer Soundkarte und Mikrofon kann man relativ einfach die Frequenz der Speichenschwingung bestimmen. Dies funktioniert jedoch nur bei nicht verflochtenen Speichen.

Hier wird nur die erste Methode bis zum Meßgerät verfolgt.

## A.1 Meßprinzip und Auswertung

Das Meßprinzip dieses Meßgerätes ist, daß die Speiche mittig mit einer Kraft belastet wird. Eine Meßuhr mißt die Durchsenkung direkt neben der Lastaufbringung. Der Meßuhrenhalter wird mittig auf der Speiche aufgelegt. Bei verflochtenen Speichen wird das längste freie Stück benutzt und es muß mit einem Fehler durch Ent-/ Belastung der korrespondierenden Speiche gerechnet werden.

[54] Speichenspannungsmeßgeräte werden von Hozan und Avocet angeboten. Das Meßgerät "C-737" von Hozan hat diverse Schwachstellen:

- Wird das Meßgerät am Speichenende angesetzt, so werden andere Speichenkräfte als in der Speichenmitte angezeigt.
- Das beigelegte Meßblatt enthält Auswertekurven für 1,63 (16 English Legal Standard Wire Gauge (SWG)), 1,83 (15 SWG) und 2,03 (14 SWG) mm dicke Speichen. Die Auswertung der Kurven ergibt geringere Kräfte als der Ansatz nach Bürgermeister.

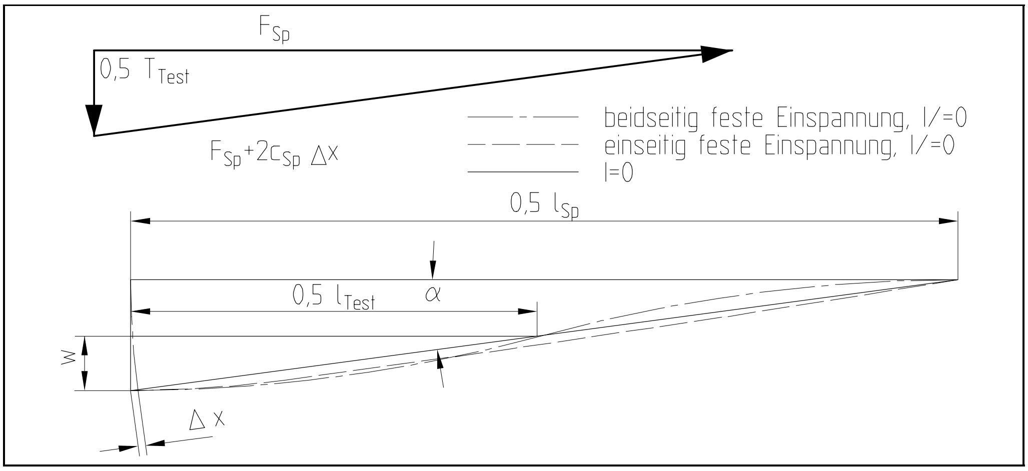


Abbildung 25: Kräfte und Geometrie beim Speichenkraftmessen

Die Speichenspannung $F_{Sp}$ kann aus der Durchsenkung $w$ berechnet werden, wenn die Last $F_{Test}$ und die Abstände $l_{Sp}$ und $l_{Test}$ bekannt sind. Zur Berechnung können mehrere Ansätze verwendet werden, wobei hier nur der Ansatz nach Bürgermeister et al. weiterverfolgt wird. Ein einfacher Ansatz mit einem Seileck, der die Seildehnung $\Delta x$, berücksichtigt, ergab einen großen Fehler durch die Nichtberücksichtigung der Biegelinie.

Bürgermeister et al. geben in [5] in der Tafel III für gezogene Stäbe bei mittigem Lastangriff folgende Biegelinien an:

$$\chi = \sqrt{\frac{F_{Sp}}{YI}} \tag{A.2}$$

$$w(x, x \leq 0,5 l_{Sp}) = \frac{F_{Test}}{F_{Sp}} \left( \frac{x}{2} - \frac{\sinh \frac{\chi l_{Sp}}{2} \sinh \chi x}{\chi \sinh \chi l_{Sp}} \right) \tag{A.3}$$

$$w(0,5 l_{Sp}) = \frac{F_{Test}}{F_{Sp}} \left( \frac{l_{Sp}}{4} - \frac{\tanh \frac{\chi l_{Sp}}{2}}{2\chi} \right) \tag{A.4}$$

Die Durchbiegung bei halber Speichenlänge setzt sich aus einem linearisierten Seileckansatz und einem Vorspannung und Flächenträgheitsmoment berücksichtigenden Korrekturglied zusammen. Zu beachten ist, daß in [5] altdeutsch geschriebene Winkelfunktionen als hyperbolische Winkelfunktionen zu verstehen sind.[55]

[55] Als Analogie könnte die Funktion der Seilkurve (biegeweicher Zugstab) dienen.

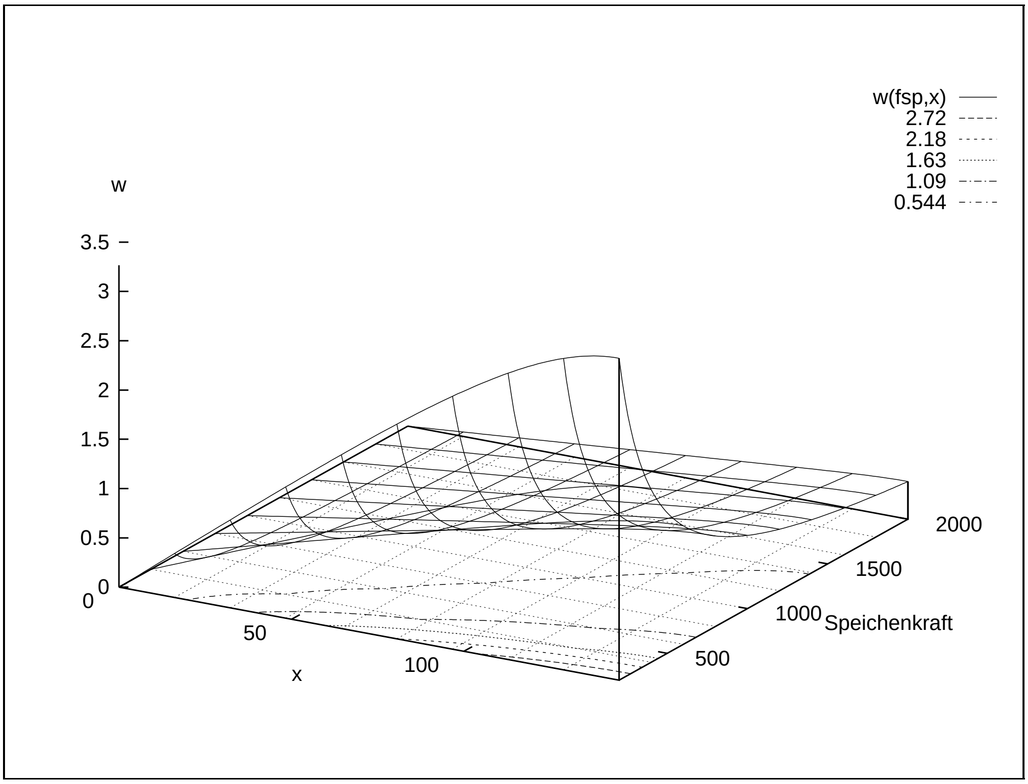


Abbildung 26: Durchsenkung nach Bürgermeister

Abbildung 26 wurde mit $Y = 210000$ N, $d = 2,0$ mm , $F_{Test} = 11,2$ N und $l_{Sp} = 290$ mm berechnet.

## A.2 Ausgeführtes Meßgerät

Das ausgeführte Spannungsmeßgerät besteht aus einem 250 mm langen U-Profil aus Aluminium mit den Abmessungen 14x12x2. In diesem ist in der Mitte eine Meßuhr mit einem Taststempel eingeklemmt. Die Speichenaufsätze sind durch ein Lochraster stufenweise in der Position veränderbar. Das Laufrad wird horizontal liegend aufgebockt. Die Anwendung ist so vorgesehen, daß das Meßgerät mittig auf eine Speiche aufgesetzt wird. Die Meßskala wird abgelesen, das Gewicht neben dem Stempel auf der Speiche eingehängt und wieder die Skala abgelesen. Mit der Wegdifferenz, der Testlast und dem Abstand der Aufsätze kann man aus den oben beschriebenen Zusammenhängen die Speichenkräfte bestimmen.

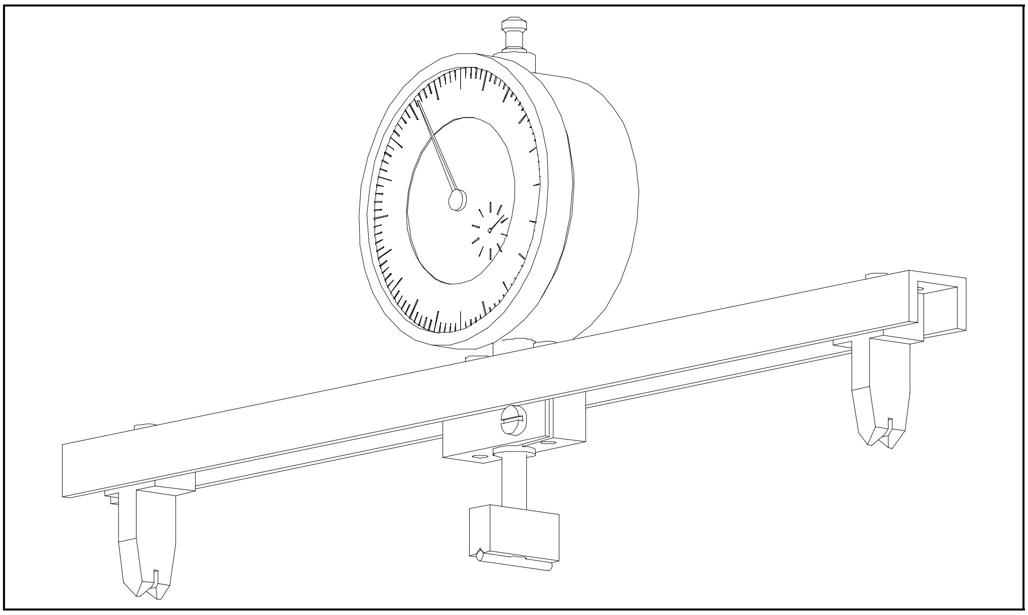

Abbildung 27: Speichenkraftmeßgerät

Eine Tabelle zum Auswerten der Meßergebnisse kann man sich mit den obigen Formeln (A.3 ff.) und einem Tabellenkalkulationsprogramm oder Funktionenplotter[56] relativ einfach und schnell erstellen. Wenn das Meßgrät nicht an den Speichenenden aufliegt, so sind Korrekturrechnungen vorzunehmen.[57]

Eine Kalibrierung des Meßgerätes bei einem Stützpunktabstand von 216 mm ergab folgende Vergleichswerte bei 290 mm langen Speichen. In der ersten Spalte in Tabelle 16 sind die tatsächlich aufgebrachten Lasten, dann die gemessene Durchsenkung bei 11,2 N und die für diese Durchsenkungen errechneten Speichenkräfte aufgeführt. Die Kalibrierlast bestand aus 20 kg-Hantelscheiben (mit Laborwagen auf 10 g genau gewogen), die über eine Umlenkrolle an dem Speichenende eingehängt wurden. Die starken Abweichungen bei einigen Lasten können durch Rasterscheinungen in der einfachen Speichenführung der Kalibriervorrichtung hervorgerufen werden.

[56] Hier wurde gnuplot verwendet.

[57] Differenz der Durchsenkung in der Mitte und an den Auflagern...

Tabelle 16: Kalibierung des Meßgerätes

| gemessen | | gerechnet | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_{Sp}$ | $w_{216}$ | $F_{Test} = 11,2$ N | | $F_{Test} = 5,3$ N | |
| N | mm | N | % | N | % |
| 220 | 1,9 | 240 | +9 | 225 | +2 |
| 415 | 1,2 | 415 | -0 | 440 | +6 |
| 610 | 0,9 | 568 | -7 | 580 | -5 |
| 810 | 0,7 | 750 | -7 | 800 | -1 |
| 1006 | 0,54 | 989 | -2 | 1000 | -1 |

Das Meßgerät erfüllt also die Maßgabe, die Speichenkraft zu messen.[58] Zudem sind die Berechnungen nach Bürgermeister nahezu von der Speichenlänge unabhängig, wenn die Aufsatzpunkte mindestens 150 mm voneinander entfernt sind.

Folgende Graphen wurden mit $Y = 210000$ N, $F_{Test} = 11,2$ N und $l_{Test} = 178$ mm berechnet. Es sind die Kurven für die Durchsenknung $w$ für 300 und 180 mm lange Speichen mit einem Durchmesser von $d_{Sp}$ =2,0 mm und 1,8 mm aufgetragen.

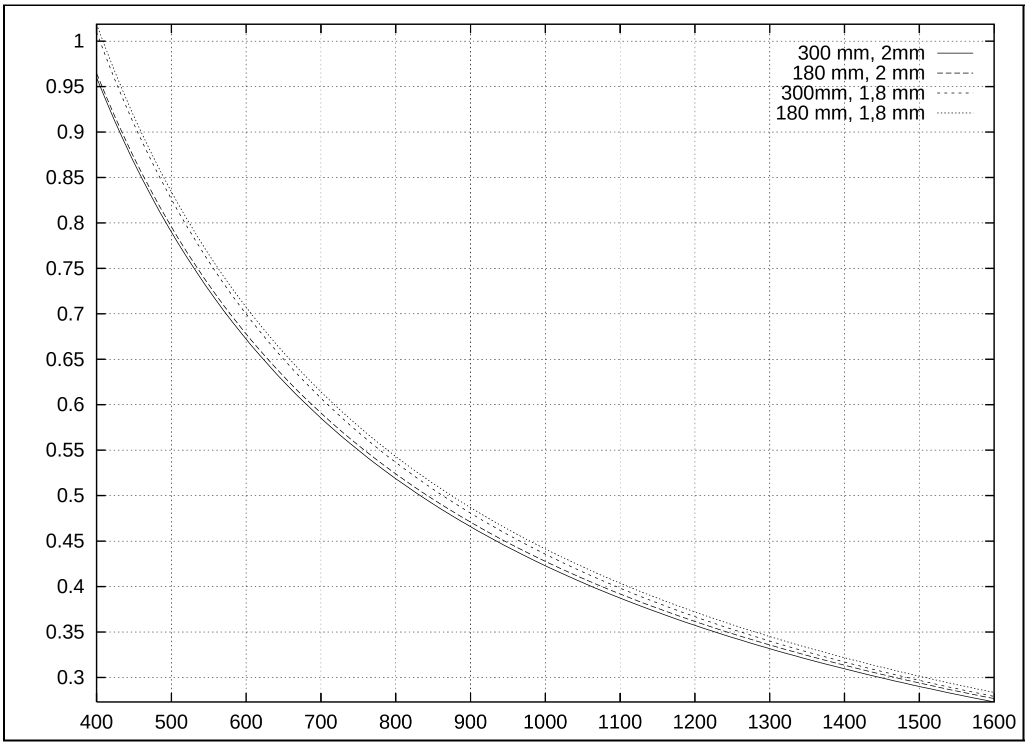


Abbildung 28: Durchsenkung als Funktion der Last bei 11,2 N Testlast

[58] Anfänglich sollte nur festgestellt werden, ob 500 oder 1200 N Vorspannkraft vorliegen! Es war kein Meßgrät mit einer Genauigkeit von ±50 N geplant!

## A.3 Biegeschwingung gespannter Stäbe

Für Interessierte , die nicht an die Literatur [11], [17] (S. 440 ff) herankommen, seien nur die wichtigsten Ansätze erwähnt.

Die Schwingungsdifferentialgleichung des gezogenen Biegestabes lautet:

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + YI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{A.5}$$

Mit der Massenbelegung $\mu$ und der Balkennormalkraft $N$. Die homogene Lösung der DGL lautet dann:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{\sqrt{\left(\frac{N}{2YI}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{YI}} + \frac{N}{2YI}} && \text{(A.6)}\\
\beta &= \sqrt{\sqrt{\left(\frac{N}{2YI}\right)^2 + \frac{\mu\omega^2}{YI}} - \frac{N}{2YI}} && \text{(A.7)}\\
w(x) &= c_1 \exp(\alpha x) + c_2 \exp(-\alpha x) + c_3 \exp(j\beta x) + c_4 \exp(-j\beta x) && \text{(A.8)}\\
&= d_1 \cosh(\alpha x) + d_2 \sinh(\alpha x) + d_3 \cos(\beta x) + d_4 \sin(\beta x) && \text{(A.9)}\\
w'(x) &= d_1 \alpha \sinh(\alpha x) + d_2 \alpha \cosh(\alpha x) - d_3 \beta \sin(\beta x) + d_4 \beta \cos(\beta x) && \text{(A.10)}\\
w''(x) &= d_1 \alpha^2 \cosh(\alpha x) + d_2 \alpha^2 \sinh(\alpha x) - d_3 \beta^2 \cos(\beta x) - d_4 \beta^2 \sin(\beta x) && \text{(A.11)}
\end{aligned}$$

### A.3.1 Starre Einspannung

Mit den wesentlichen Randbedingungen (WRB) $w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{A(\omega)}}\vec{x} &= \vec{0} && \text{(A.12)}\\
\overline{\overline{A(\omega)}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \cosh(\alpha L) & \sinh(\alpha L) & \cos(\beta L) & \sin(\beta L) \\ \alpha \sinh(\alpha L) & \alpha \cosh(\alpha L) & -\beta \sin(\beta L) & \beta \cos(\beta L) \end{bmatrix} && \text{(A.13)}\\
\vec{x} &= \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} && \text{(A.14)}\\
\det A(\omega) &= 0 && \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

Die Eigenfrequenzen $\omega$ erhält man durch Näherungsverfahren:

$$0 = 2\alpha\beta\left(\cosh(\alpha L)\cos(\beta L) - 1\right) + \left(\beta^2 - \alpha^2\right)\sinh(\alpha L)\sin(\beta L) \tag{A.16}$$

### A.3.2 Biegeweiche Einspannung

Wird die Einspannung biegeweich mit einem $c_\varphi$ angenommen, so ergeben sich mit den WRB $w(0) = w(L) = 0$, $w'(0) = YIw''(0)/c_\varphi$ und $w'(L) = -YIw''(L)/c_\varphi$:

$$\overline{\overline{A(\omega)}}\vec{x} = \vec{0} \tag{A.17}$$

$$\overline{\overline{A(\omega)}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh(\alpha L) & \sinh(\alpha L) & \cos(\beta L) & \sin(\beta L) \\ -YI\alpha^2 & c_\varphi\alpha & YI\beta^3 & c_\varphi\beta \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \tag{A.18}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

$$A_{41} = c_\varphi\alpha\sinh(\alpha L) - YI\alpha^2\cosh(\alpha L) \tag{A.20}$$

$$A_{42} = c_\varphi\alpha\cosh(\alpha L) - YI\alpha^2\sinh(\alpha L) \tag{A.21}$$

$$A_{43} = -c_\varphi\beta\sin(\beta L) + YI\beta^2\cos(\beta L) \tag{A.22}$$

$$A_{44} = c_\varphi\beta\cos(\beta L) + YI\beta^2\sin(\beta L) \tag{A.23}$$

$$\det A(\omega) = 0 \tag{A.24}$$

# B Felgenquerschnitte

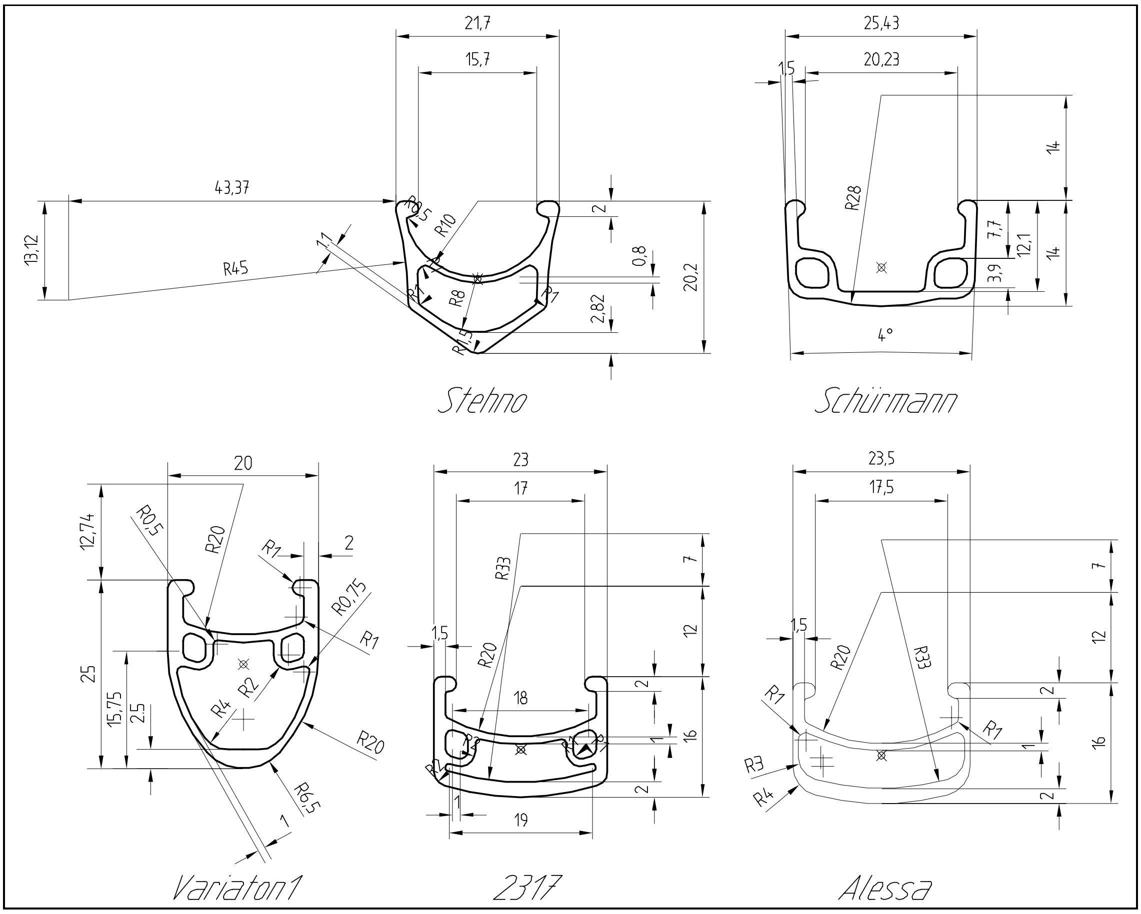


Abbildung 29: Abmessungen von Felgenquerschnitten

# C Nabentorsionsfedersteifigkeiten

Für die Berechnung der Speichenzusatzkräfte infolge des Antriebsdrehmomentes ist die Torsionsfedersteifigkeit der Naben zu bestimmen.

Für die Berechnung der Torsionsfedersteifigkeit von ausgeführten Naben werden diese vermessen und gezeichnet. In axialen Schnitten werden dann die Außen- und Innenradien bestimmt und für die Berechnung verwendet.

Das Torsionsflächenmoment für einen Kreisring ist:

$$I_t = \frac{\pi}{2}(r_a^4 - r_i^4) \tag{C.25}$$

Die Torsionfedersteifigkeit einer Nabenwelle beträgt:

$$c_{\varphi_N} = \frac{G}{a \sum_{i=0}^{n} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{I_{t_{i+1}} + I_{t_i}}} \tag{C.26}$$

Bei symmetrischen Nabenwellen wird nur eine Hälfte berechnet und $a = 2$, bei asymetrischen die gesamte Nabe zwischen den Flanschen und $a = 1$ angewendet.

## C.1 Sachs New-Success

Die Musternabe für die meisten Rechnungen ist eine 1992 erworbene New-Success von Sachs.

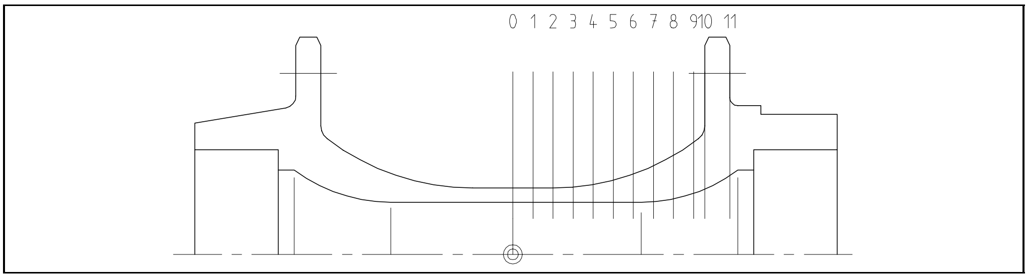


Abbildung 30: Querschnitt der New-Succesnabe

Tabelle 17: Querschnitt der New-Succes

| i | $x$ | $r_1$ | $r_2$ | $I_t$ | $\frac{I_{t_{i+1}}+I_{t_i}}{2(x_{i+1}-x_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 6,50 | 8,25 | 4472,8 | 1789,1 |
| 1 | 2,5 | 6,50 | 8,25 | 4472,8 | 1789,1 |
| 2 | 5,0 | 6,50 | 8,25 | 4472,8 | 1861,0 |
| 3 | 7,5 | 6,50 | 8,35 | 4832,0 | 2180,7 |
| 4 | 10,0 | 6,50 | 8,67 | 6071,6 | 2913,9 |
| 5 | 12,5 | 6,50 | 9,21 | 8498,1 | 4255,4 |
| 6 | 15,0 | 6,50 | 9,98 | 12778,7 | 6556,4 |
| 7 | 17,5 | 6,56 | 10,99 | 20005,6 | 10456,4 |
| 8 | 20,0 | 6,90 | 12,29 | 32276,1 | 17207,9 |
| 9 | 22,5 | 7,59 | 13,92 | 53763,2 | 53240,9 |
| 10 | 23,9 | 8,13 | 15,97 | 95311,3 | |
| | | | | | |
| 10 | 23,9 | 8,13 | 22,50 | 395715,4 | 126420,2 |
| 11 | 27,0 | 9,80 | 22,50 | 388089,4 | |

Die Federsteifigkeit der Nabe ist:

$$c_{\varphi_N} = \frac{G}{2\sum_{i=0}^{9}\frac{2(x_{i+1}-x_i)}{I_{t_{i+1}}+I_{t_i}}} = 4660 \text{ Nm/rad} = 81 \text{ Nm/°} \qquad \text{(C.27)}$$

## C.2 Shimano Exage

Als ein Kassettennabenbeispiel dient eine 1989 erworbene Exage von Shimano. Da der hier interessante geometrische Aufbau mit den heute noch vertriebenen Rennradnaben von Shimano vergleichbar ist, kann davon ausgegangen werden, daß auch diese eine ähnliche Torsionsfedersteifigkeit aufweisen.[59]

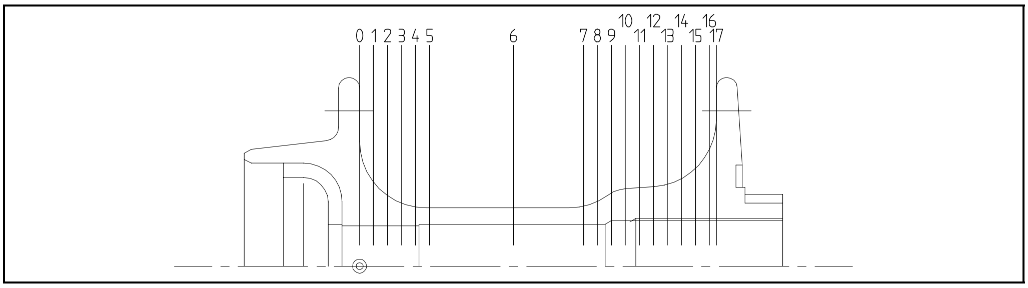


Abbildung 31: Querschnitt durch eine Shimano-Kassettennabe

Tabelle 18: Querschnitt der Exagenabe

| i | $x$ | $r_1$ | $r_2$ | $I_t$ | $\frac{I_{t_{i+1}}+I_{t_i}}{2(x_{i+1}-x_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5,75 | 17,85 | 157750,63 | 47205,82 |
| 1 | 2 | 5,75 | 12,02 | 31072,64 | 11425,33 |
| 2 | 4 | 5,75 | 10,1 | 14628,69 | 5827,38 |
| 3 | 6 | 5,75 | 9,02 | 8680,83 | 3762,06 |
| 4 | 8 | 5,75 | 8,47 | 6367,42 | 2991,92 |
| 5 | 1 | 6 | 8,35 | 5600,25 | 466,69 |
| 6 | 22 | 6 | 8,35 | 5600,25 | 603,86 |
| 7 | 32 | 6 | 8,58 | 6476,98 | 4010,18 |
| 8 | 34 | 6 | 9,27 | 9563,74 | 6524,83 |
| 9 | 35,97 | 6,5 | 10,48 | 16144,1 | 9180,29 |
| 10 | 38 | 6,5 | 11,11 | 21127,87 | 10871,26 |
| 11 | 40 | 6,5 | 11,25 | 22357,15 | 11497,58 |
| 12 | 42 | 6,5 | 11,39 | 23633,19 | 12616,49 |
| 13 | 44 | 6,5 | 11,72 | 26832,76 | 15625,29 |
| 14 | 46 | 6,5 | 12,51 | 35668,42 | 23087,68 |
| 15 | 48 | 6,5 | 13,95 | 56682,30 | 43576,98 |
| 16 | 50 | 6,5 | 16,64 | 117625,61 | 206694,34 |
| 17 | 51 | 6,5 | 20,88 | 295763,06 | |

$$c_{\varphi_N} = \frac{G}{\sum_{i=0}^{17} \frac{2(x_{i+1}-x_i)}{I_{t_{i+1}}+I_{t_i}}} = 5049 \text{ Nm/rad} = 88 \text{ Nm/}^\circ \qquad \text{(C.28)}$$

In [19] kommen Prof. v. d. Osten-Sacken et al. nur auf ein $c_{\varphi_N}$ von ca. 38 Nm/°. Hier wird trotzdem mit dem theoretisch berechneten Wert gerechnet, da Prof. v. d. Osten-Sacken keine Aussagen über den Meßaufbau und die Meßkette tätigt.

[59] Ebenso dürften die Naben von Campagnolo ähnliche Federsteifigkeiten aufweisen.

## C.3 Shimano Parallax

Vermessen wurde eine Deore XT-Nabe (FH-M 737).

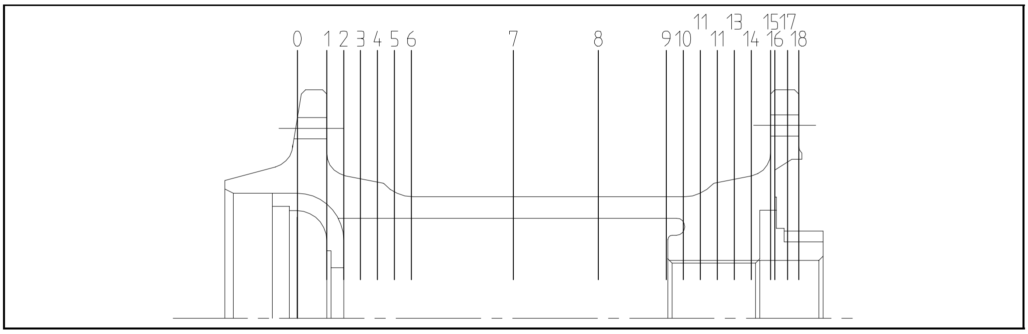


Abbildung 32: Querschnitt durch eine Shimano-Parallaxnabe

Tabelle 19: Querschnitt der Parallaxnabe

| i | $x$ | $r_1$ | $r_2$ | $I_t$ | $\frac{I_{t_{i+1}}+I_{t_i}}{2(x_{i+1}-x_i)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| links | | | | | |
| 0 | 0 | 14,75 | 22,4 | 102214,83 | 30657,68 |
| 1 | 3,45 | 13,49 | 22,4 | 109323,17 | 34864,75 |
| 2 | 5,45 | 11,8 | 16,8 | 30135,82 | 14263,7 |
| 3 | 7,45 | 11,8 | 16,45 | 26918,97 | 12601,15 |
| 4 | 9,45 | 11,8 | 16,05 | 23485,64 | 9592,47 |
| 5 | 11,45 | 11,8 | 14,89 | 14884,24 | 6598,1 |
| 6 | 13,45 | 11,8 | 14,35 | 11508,15 | 959,01 |
| 7 | 25,45 | 11,8 | 14,35 | 11508,15 | 1150,81 |
| 8 | 35,45 | 11,8 | 14,35 | 11508,15 | 1438,52 |
| 9 | 43,45 | 11,8 | 14,35 | 11508,15 | 6066,35 |
| 10 | 45,45 | 11,4 | 14,35 | 12757,24 | 8814,75 |
| 11 | 47,45 | 6,85 | 14,74 | 22501,74 | 13521,76 |
| 12 | 49,45 | 6,85 | 15,99 | 31585,3 | 16641,51 |
| 13 | 51,45 | 6,85 | 16,39 | 34980,74 | 18403,71 |
| 14 | 53,45 | 6,85 | 16,79 | 38634,1 | 21242,58 |
| 15 | 55,75 | 12,75 | 19,5 | 59081,75 | −529,88 |
| rechts | | | | | |
| 15 | 55,75 | 12,75 | 19,5 | 59081,75 | 122893,28 |
| 16 | 56,45 | 14,31 | 22,75 | 112968,85 | 72728,04 |
| 17 | 57,75 | 18,44 | 22,75 | 76124,05 | 57023,62 |
| 18 | 59,05 | 18,75 | 22,75 | 72137,38 | |

$$c_{\varphi_{N_l}} = \frac{G}{\sum_{i=0}^{15} \frac{2(x_{i+1}-x_i)}{I_{t_{i+1}}+I_{t_i}}} = 7838 \text{ Nm/rad} = 137 \text{ Nm/}^\circ \tag{C.29}$$

$$c_{\varphi_{N_r}} = \frac{G}{\sum_{i=15}^{18} \frac{2(x_{i+1}-x_i)}{I_{t_{i+1}}+I_{t_i}}} = 715180 \text{ Nm/rad} = 12482 \text{ Nm/}^\circ \tag{C.30}$$

Zu beachten ist, daß auch der rechte Speichenflansch hier auch über eine dünne Verbindung relativ weich an die Drehmomenteinleitung angekuppelt ist. Eine Nachrechnung ergibt jedoch eine um zwei Größenordnungen größere Federsteifigkeit für den rechten Flansch als für den linken. Die Torsionsfedersteifigkeit des rechten Flansches kann also vernachlässigt werden.

# D Torsionsfedersteifigkeit der Radialeinspeichung

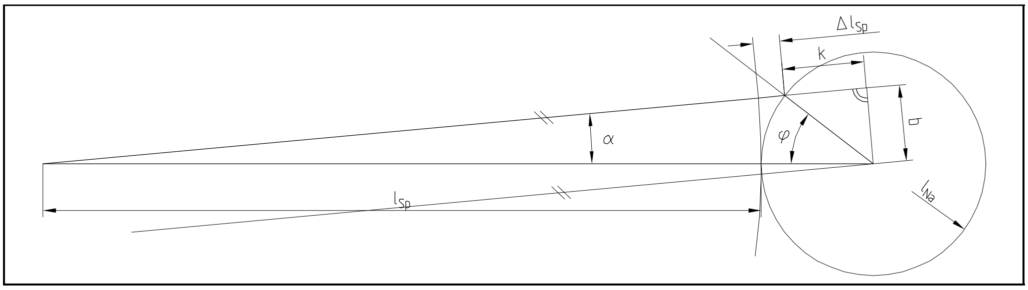


Abbildung 33: Geometrie der Radialeinspeichung

Geometriebedingt läßt sich eine geschlossene Funktion für $c_{\varphi_{radial}}$ nicht mit vertretbarem Aufwand herleiten. Daher wurde die Geometrie mit einem CAD-Programm gezeichnet und die Speichenlängung $\Delta l_{Sp}$ in Abhängigkeit vom Drehwinkel $\varphi$ ausgemessen. Für die folgenden Werte wurden $c_{Sp} = 1830$ N/mm, $l_{Na} = 22,5$ mm und $l_{Sp} = 290$ mm zugrundegelegt. Die Speiche habe keinen plastischen Bereich!

Tabelle 20: Schrittweise Berechnung von $c_{\varphi_{radial}}$

| $\varphi$ ° | $\Delta l_{Sp}$ mm | $\alpha$ ° | $b$ mm | $\Delta F_{Sp}$ N | $M$ Nm | $c_\varphi$ Nm/° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0,00369 | 0,0776 | 0,4231 | 6,75 | 0,05 | 0,05 |
| 2 | 0,01477 | 0,1551 | 0,8461 | 27,03 | 0,41 | 0,21 |
| 3 | 0,03323 | 0,2326 | 1,2688 | 60,81 | 1,39 | 0,46 |
| 4 | 0,05906 | 0,3100 | 1,6909 | 108,08 | 3,29 | 0,82 |
| 5 | 0,09225 | 0,3873 | 2,1125 | 168,82 | 6,42 | 1,28 |
| 6 | 0,13279 | 0,4645 | 2,5332 | 243,01 | 11,08 | 1,85 |
| 7 | 0,18067 | 0,5414 | 2,9530 | 330,63 | 17,57 | 2,51 |
| 8 | 0,23589 | 0,6182 | 3,3716 | 431,68 | 26,20 | 3,27 |
| 9 | 0,29835 | 0,6947 | 3,7890 | 545,98 | 37,24 | 4,14 |
| 10 | 0,36811 | 0,7710 | 4,2049 | 673,64 | 50,99 | 5,10 |
| 12 | 0,52934 | 0,9226 | 5,0318 | 968,69 | 87,74 | 7,31 |
| 14 | 0,71931 | 1,0728 | 5,8511 | 1316,34 | 138,64 | 9,90 |
| 16 | 0,93772 | 1,2215 | 6,6615 | 1716,03 | 205,76 | 12,86 |
| 18 | 1,18425 | 1,3682 | 7,4619 | 2167,18 | 291,08 | 16,17 |
| 20 | 1,45853 | 1,5130 | 8,2510 | 2669,11 | 396,41 | 19,82 |
| 25 | 2,26280 | 1,8645 | 10,1673 | 4140,92 | 757,84 | 30,31 |
| 30 | 3,23032 | 2,1987 | 11,9893 | 5911,49 | 1275,74 | 42,52 |
| 35 | 4,35213 | 2,5129 | 13,7011 | 7964,40 | 1964,18 | 56,12 |
| 40 | 5,61800 | 2,8042 | 15,2887 | 10280,94 | 2829,27 | 70,73 |
| 45 | 7,01652 | 3,0706 | 16,7393 | 12840,23 | 3868,85 | 85,97 |
| 50 | 8,53526 | 3,3098 | 18,0423 | 15619,53 | 5072,61 | 101,45 |

Zu beachten ist, daß ab einer Nabenverdrehung von 6 ° die mit bis zu 1200 N vorgespannten Speichen durch eine Einschnürdehnung plastisch gelängt werden. Die Vorspannung wird abgebaut. Bei einem Verdrehwinkel von 50 ° ist mit einem Gewaltbruch zur rechnen. Die in der Tabelle dafür angegebenen Kräfte und Momente stimmen allerdings nicht, da die Tabelle im gesamten Bereich mit vollelastischen Speichen gerechnet wurde!

Im Bereich bis 4° Nabenverdrehung können mit der Newton-Lagrange-Interpolation gewonnene Näherungspolynome verwendet werden:

$$M = -0,0041\bar{6}\,\varphi^4 + 0,07\bar{6}\,\varphi^3 - 0,045\bar{8}\,\varphi^2 + 0,02\bar{3}\,\varphi \quad \text{(D.31)}$$

$$c_{\varphi_{radial}} = 0,001\bar{6}\varphi^4 - 0,01\bar{3}\,\varphi^3 + 0,08\bar{3}\,\varphi^2 - 0,021\bar{6}\,\varphi \quad \text{(D.32)}$$

$$b = -0,0005\,\varphi^2 + 0,77765\,\varphi \quad \text{(D.33)}$$

# E Programmquellen

## E.1 Eulerstab

```
title     eulerbalken
sizing       1000000
elements     52
$ es wird der Elementyp 52 (Balkenformulierung
$ nach Euler-Bernoulli verwendet)
large disp
buckle,2
$ das Ausknicken soll bis zur 2. Eigenform
$ berechnet werden
large disp
end
$ Ende des Headers, es wird jetzt die Geometrie
$ definiert
connectivity

    1   52    1    2
    2   52    2    3
    3   52    3    4
    4   52    4    5
    5   52    5    6
    6   52    6    7
    7   52    7    8
    8   52    8    9
    9   52    9   10
   10   52   10   11
   11   52   11   12
   12   52   12   13
   13   52   13   14
   14   52   14   15
   15   52   15   16
   16   52   16   17
   17   52   17   18
   18   52   18   19
   19   52   19   20
   20   52   20   21
coordinates
    3   21
    1 0.00000+0 0.00000+0 0.00000+0
    2 0.00000+0 0.00000+0 9.85000+1
    3 0.00000+0 0.00000+0 1.97000+2
    4 0.00000+0 0.00000+0 2.95500+2
    5 0.00000+0 0.00000+0 3.94000+2
    6 0.00000+0 0.00000+0 4.92500+2
    7 0.00000+0 0.00000+0 5.91000+2
    8 0.00000+0 0.00000+0 6.89500+2
    9 0.00000+0 0.00000+0 7.88000+2
   10 0.00000+0 0.00000+0 8.86500+2
   11 0.00000+0 0.00000+0 9.85000+2
   12 0.00000+0 0.00000+0 1.08350+3
   13 0.00000+0 0.00000+0 1.18200+3
   14 0.00000+0 0.00000+0 1.28050+3
   15 0.00000+0 0.00000+0 1.37900+3
   16 0.00000+0 0.00000+0 1.47750+3
   17 0.00000+0 0.00000+0 1.57600+3
   18 0.00000+0 0.00000+0 1.67450+3
   19 0.00000+0 0.00000+0 1.77300+3
   20 0.00000+0 0.00000+0 1.87150+3
   21 0.00000+0 0.00000+0 1.97000+3
$ Die Geometrie ist definiert, jetzt werden
$ Gruppen benannt.
define,element,set,alle
1 to 20
define,node,set,unten
1
define,node,set,oben
21
define,node,set,mitte
11
define,node,set,stoerk
16
$ Definierung der Materialeigenschaften
isotropic

    1,von mises,isotropic,
75000.0,0.33,2.7
alle
geometry

123.0,102445.6,8262.4,5.9246+7,123.0,123.0
       alle
$Definierung der Randbedingungen
fixed disp

0.,0.,0.,0.
1 2 3 6
unten
0.,0.,0.
1 2 6
oben
0.,0.
1 2
mitte
control
500,10,,,,,1
 0.01,
post
0,16,17,1,0,19,20,0,1,0,6
end option
$ Knicklast aufbringen
point load

,,-50
oben
auto load
400,0
continue
$ Eigenformen berechnen
buckle

continue
$ Ende des Files
```

## E.2 Felgenkippen

```
title     Felgenkippen
sizing       1000000  108  108  648
elements     52
beam sect
felge
0,123.4,2445.0,8262.7,2109.0,123.,123.
last
large disp
buckle,7
end
$Instabiltaetsuntersuchung von Fahrradfelgen
$hier spez. das Auskippen aus der Ebene
$Olaf Schultz, Mai 1996
$kleine Studienarbeit
connectivity

    1   52    1    2
    2   52    5    3
    3   52    6   75
    4   52    8   76
    5   52   10   77
    6   52   12   78
    7   52   14   79
    8   52   16   80
    9   52   18   81
   10   52   20   82
   11   52   22   83
   12   52   24   84
   13   52   26   85
   14   52   28   86
   15   52   30   87
   16   52   32   88
   17   52   34   89
   18   52   36   90
   19   52   38   91
   20   52    7   92
   21   52    9   93
   22   52   11   94
   23   52   13   95
   24   52   15   96
   25   52   17   97
   26   52   19   98
   27   52   21   99
   28   52   23  100
   29   52   25  101
   30   52   27  102
   31   52   29  103
   32   52   31  104
   33   52   33  105
   34   52   35  106
   35   52   37  107
   36   52   39  108
   37   52   37   71
   38   52   71   36
   39   52   36   70
   40   52   35   69
   41   52   34   68
   42   52   33   67
   43   52   32   66
   44   52   31   65
   45   52   30   64
   46   52   29   63
   47   52   28   62
   48   52   27   61
   49   52   26   60
   50   52   25   59
   51   52   24   58
   52   52   23   57
   53   52   22   56
   54   52   21   55
   55   52   20   54
   56   52   19   53
   57   52   18   52
   58   52   17   51
   59   52   16   50
   60   52   15   49
   61   52   14   48
   62   52   13   47
   63   52   12   46
   64   52   11   45
   65   52   10   44
   66   52    9   43
   67   52    8   42
   68   52    7   41
   69   52    6   40
   70   52    5    4
   71   52    1   74
   72   52   39   73
   73   52   38   72
   74   52   70   35
   75   52   69   34
   76   52   68   33
   77   52   67   32
   78   52   66   31
   79   52   65   30
   80   52   64   29
   81   52   63   28
   82   52   62   27
   83   52   61   26
   84   52   60   25
   85   52   59   24
   86   52   58   23
   87   52   57   22
   88   52   56   21
   89   52   55   20
   90   52   54   19
   91   52   53   18
   92   52   52   17
   93   52   51   16
   94   52   50   15
   95   52   49   14
   96   52   48   13
   97   52   47   12
   98   52   46   11
   99   52   45   10
  100   52   44    9
  101   52   43    8
  102   52   42    7
  103   52   41    6
  104   52   40    5
  105   52    4    1
  106   52   74   39
  107   52   73   38
  108   52   72   37
coordinates
    3  108
```

```
   1 0.00000+0 3.00000+2 0.00000+0
   2 6.5537-15 2.25000+1 -20.0
   3 3.90708+0 2.21582+1 40.0
   4 2.61467+1 2.98858+2 0.00000+0
   5 5.20945+1 2.95442+2 0.00000+0
   6 1.02606+2 2.81908+2 0.00000+0
   7 1.50000+2 2.59808+2 0.00000+0
   8 1.92836+2 2.29813+2 0.00000+0
   9 2.29813+2 1.92836+2 0.00000+0
  10 2.59808+2 1.50000+2 0.00000+0
  11 2.81908+2 1.02606+2 0.00000+0
  12 2.95442+2 5.20945+1 0.00000+0
  13 3.00000+2 7.1054-15 0.00000+0
  14 2.95442+2-5.20945+1 0.00000+0
  15 2.81908+2-1.02606+2 0.00000+0
  16 2.59808+2-1.50000+2 0.00000+0
  17 2.29813+2-1.92836+2 0.00000+0
  18 1.92836+2-2.29813+2 0.00000+0
  19 1.50000+2-2.59808+2 0.00000+0
  20 1.02606+2-2.81908+2 0.00000+0
  21 5.20945+1-2.95442+2 0.00000+0
  22 4.2633-14-3.00000+2 0.00000+0
  23-5.20945+1-2.95442+2 0.00000+0
  24-1.02606+2-2.81908+2 0.00000+0
  25-1.50000+2-2.59808+2 0.00000+0
  26-1.92836+2-2.29813+2 0.00000+0
  27-2.29813+2-1.92836+2 0.00000+0
  28-2.59808+2-1.50000+2 0.00000+0
  29-2.81908+2-1.02606+2 0.00000+0
  30-2.95442+2-5.20945+1 0.00000+0
  31-3.00000+2-1.2079-13 0.00000+0
  32-2.95442+2 5.20945+1 0.00000+0
  33-2.81908+2 1.02606+2 0.00000+0
  34-2.59808+2 1.50000+2 0.00000+0
  35-2.29813+2 1.92836+2 0.00000+0
  36-1.92836+2 2.29813+2 0.00000+0
  37-1.50000+2 2.59808+2 0.00000+0
  38-1.02606+2 2.81908+2 0.00000+0
  39-5.20945+1 2.95442+2 0.00000+0
  40 7.76457+1 2.89778+2 0.00000+0
  41 1.26785+2 2.71892+2 0.00000+0
  42 1.72073+2 2.45746+2 0.00000+0
  43 2.12132+2 2.12132+2 0.00000+0
  44 2.45746+2 1.72073+2 0.00000+0
  45 2.71892+2 1.26785+2 0.00000+0
  46 2.89778+2 7.76457+1 0.00000+0
  47 2.98858+2 2.61467+1 0.00000+0
  48 2.98858+2-2.61467+1 0.00000+0
  49 2.89778+2-7.76457+1 0.00000+0
  50 2.71892+2-1.26785+2 0.00000+0
  51 2.45746+2-1.72073+2 0.00000+0
  52 2.12132+2-2.12132+2 0.00000+0
  53 1.72073+2-2.45746+2 0.00000+0
  54 1.26785+2-2.71892+2 0.00000+0
  55 7.76457+1-2.89778+2 0.00000+0
  56 2.61467+1-2.98858+2 0.00000+0
  57-2.61467+1-2.98858+2 0.00000+0
  58-7.76457+1-2.89778+2 0.00000+0
  59-1.26785+2-2.71892+2 0.00000+0
  60-1.72073+2-2.45746+2 0.00000+0
  61-2.12132+2-2.12132+2 0.00000+0
  62-2.45746+2-1.72073+2 0.00000+0
  63-2.71892+2-1.26785+2 0.00000+0
  64-2.89778+2-7.76457+1 0.00000+0
  65-2.98858+2-2.61467+1 0.00000+0
  66-2.98858+2 2.61467+1 0.00000+0
  67-2.89778+2 7.76457+1 0.00000+0
  68-2.71892+2 1.26785+2 0.00000+0
  69-2.45746+2 1.72073+2 0.00000+0
  70-2.12132+2 2.12132+2 0.00000+0
  71-1.72073+2 2.45746+2 0.00000+0
  72-1.26785+2 2.71892+2 0.00000+0
  73-7.76457+1 2.89778+2 0.00000+0
  74-2.61467+1 2.98858+2 0.00000+0
  75 7.69545+0 2.11431+1-20.0
  76 1.44627+1 1.72360+1-20.0
  77 1.94856+1 1.12500+1-20.0
  78 2.21582+1 3.90708+0-20.0
  79 2.21582+1-3.90708+0-20.0
  80 1.94856+1-1.12500+1-20.0
  81 1.44627+1-1.72360+1-20.0
  82 7.69545+0-2.11431+1-20.0
  83-4.1044-15-2.25000+1-20.0
  84-7.69545+0-2.11431+1-20.0
  85-1.44627+1-1.72360+1-20.0
  86-1.94856+1-1.12500+1-20.0
  87-2.21582+1-3.90708+0-20.0
  88-2.21582+1 3.90708+0-20.0
  89-1.94856+1 1.12500+1-20.0
  90-1.44627+1 1.72360+1-20.0
  91-7.69545+0 2.11431+1-20.0
  92 1.12500+1 1.94856+1 40.0
  93 1.72360+1 1.44627+1 40.0
  94 2.11431+1 7.69545+0 40.0
  95 2.25000+1 4.4409-15 40.0
  96 2.11431+1-7.69545+0 40.0
  97 1.72360+1-1.44627+1 40.0
  98 1.12500+1-1.94856+1 40.0
  99 3.90708+0-2.21582+1 40.0
 100-3.90708+0-2.21582+1 40.0
 101-1.12500+1-1.94856+1 40.0
 102-1.72360+1-1.44627+1 40.0
 103-2.11431+1-7.69545+0 40.0
 104-2.25000+1-3.5527-15 40.0
 105-2.11431+1 7.69545+0 40.0
 106-1.72360+1 1.44627+1 40.0
 107-1.12500+1 1.94856+1 40.0
 108-3.90708+0 2.21582+1 40.0
define,node,set,nabe
2,3,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,c
87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,c
100,101,102,103,104,105,106,107,108
define,node,set,auszen
      4      to      74
define,element,set,felge
     37      to     108
define,element,set,sp_lin
1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
define,element,set,sp_rec
2,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,c
33,34,35,36
isotropic

   1                       0    0
75000.,0.33,2.7,0.,0.,0.
felge
isotropic

   2                       0    0
210000,0.3,7.85,.002
```

```
sp_lin
isotropic

    3                       0    0
210000,0.3,7.85,.0024
sp_rec
geometry

2.54,0.51,0.51,0.,0.,0.
sp_rec
2.54,0,600.
sp_lin
0.,1,.0,0.,0.,0.
felge
fixed disp

0.,0.,0.,0.,0.
1,2,3,4,5
nabe
buckle increment
   80,0.001,0,1

post
0,16,17,1,0,19,20,0,1,0,6
end option
$..................
$....Start des Belastungsmodelles
$....Speichen vorspannen, 10bar, nachspannen
control
99999,40,0,0,0,1,1,0,1,0
0.1,0.,0.,0.,0.,0.,0.
$Erstes Speichenanziehen
time step
 1.00000-1
auto load
$Schritte, wie oft abgekuehlt wird
8,2
change state
1,4,0,0,0,0,0,0
-0.14288
$0
sp_rec
       1      to       3
change state
1,4,0,0,0,0,0,0
-0.28571
$0
sp_lin
       1      to       3
continue
$Das waren die Schritte 1--5
$Schlauchdruck 10bar aufbringen
$(515 N f"ur je 72 Knoten)
point loads

3.17-14,-5.17+02
1
point loads

-4.51+01,-5.15+02
4
point loads

-8.98+01,-5.09+02
5
point loads

-1.77+02,-4.86+02
6
point loads

-2.58+02,-4.48+02
7
point loads

-3.32+02,-3.96+02
8
point loads

-3.96+02,-3.32+02
9
point loads

-4.48+02,-2.58+02
10
point loads

-4.86+02,-1.77+02
11
point loads

-5.09+02,-8.98+01
12
point loads

-5.17+02,-1.22-14
13
point loads

-5.09+02,8.98+01
14
point loads

-4.86+02,1.77+02
15
point loads

-4.48+02,2.58+02
16
point loads

-3.96+02,3.32+02
17
point loads

-3.32+02,3.96+02
18
point loads

-2.58+02,4.48+02
19
point loads

-1.77+02,4.86+02
20
point loads

-8.98+01,5.09+02
21
point loads
```

```
-3.17-14,5.17+02
22
point loads

8.98+01,5.09+02
23
point loads

1.77+02,4.86+02
24
point loads

2.58+02,4.48+02
25
point loads

3.32+02,3.96+02
26
point loads

3.96+02,3.32+02
27
point loads

4.48+02,2.58+02
28
point loads

4.86+02,1.77+02
29
point loads

5.09+02,8.98+01
30
point loads

5.17+02,2.08-13
31
point loads

5.09+02,-8.98+01
32
point loads

4.86+02,-1.77+02
33
point loads

4.48+02,-2.58+02
34
point loads

3.96+02,-3.32+02
35
point loads

3.32+02,-3.96+02
36
point loads

2.58+02,-4.48+02
37
point loads

1.77+02,-4.86+02
38
point loads

8.98+01,-5.09+02
39
point loads

-1.34+02,-4.99+02
40
point loads

-2.18+02,-4.69+02
41
point loads

-2.97+02,-4.24+02
42
point loads

-3.66+02,-3.66+02
43
point loads

-4.24+02,-2.97+02
44
point loads

-4.69+02,-2.18+02
45
point loads

-4.99+02,-1.34+02
46
point loads

-5.15+02,-4.51+01
47
point loads

-5.15+02,4.51+01
48
point loads

-4.99+02,1.34+02
49
point loads

-4.69+02,2.18+02
50
point loads

-4.24+02,2.97+02
51
point loads

-3.66+02,3.66+02
52
point loads

-2.97+02,4.24+02
53
point loads

-2.18+02,4.69+02
```

```
54
point loads

-1.34+02,4.99+02
55
point loads

-4.51+01,5.15+02
56
point loads

4.51+01,5.15+02
57
point loads

1.34+02,4.99+02
58
point loads

2.18+02,4.69+02
59
point loads

2.97+02,4.24+02
60
point loads

3.66+02,3.66+02
61
point loads

4.24+02,2.97+02
62
point loads

4.69+02,2.18+02
63
point loads

4.99+02,1.34+02
64
point loads

5.15+02,4.51+01
65
point loads

5.15+02,-4.51+01
66
point loads

4.99+02,-1.34+02
67
point loads

4.69+02,-2.18+02
68
point loads

4.24+02,-2.97+02
69
point loads

3.66+02,-3.66+02
70
point loads

2.97+02,-4.24+02
71
point loads

2.18+02,-4.69+02
72
point loads

1.34+02,-4.99+02
73
point loads

4.51+01,-5.15+02
74
continue
$Das war das Luftdruckaufbringen
$ Und endlich die Seitenkraft auf 3 Neben-
$ einander liegende Knoten aufbringen.
time step
 1.11000-1
auto load
    1    0
point loads

-2.58+02,-4.48+02,-200
72
point loads

-2.18+02,-4.69+02,-200
41
point loads

-2.97+02,-4.24+02,-200
42
continue
$Nur noch die Eigenformen berechnen
buckle

continue
$.Das ist das Ende des Belastungsmodelles
$..................
```

## E.3 Speichenaxialsteifigkeit

Das folgende AutoLISP-Listing ist für die englische Version von AutoCAD Release 12 geschrieben. Es dürfte auch mit anderen Versionen als Release 12 funktionieren. Aufgrund eines Bugs in einigen Subreleases in der deutschen R12 kann es vorkommen, das AutoCAD direkt auf die Betriebsystemebene zurückspringt![60]

```
; Mehrere Funktionen Plotten unter Bereichseinschraenkungen
; Konkret: Speichenaxialsteifigkeiten von Fahrradlaufraedern
; Olaf Schultz, Harburg, den 7.-8.3.96
(defun c:muplot ()
 (setq cecolor_si (getvar "cecolor_si"))
 (setq orthomode_si (getvar "orthomode")) (setvar "orthomode" 0)
 (setq a 40.0 b 20.0 h 290.0 d 1.8 E 210000.0 Fspmax 1200)
 (setq Fa1 Fspmax Fb1 (* Fa1 (/ a b)))
 (if (> Fb1 Fspmax) (setq Fb1 Fspmax Fa1 (* Fb1 (/ b a))))
 (setq BruchDehn 8) ;Bruchdehnung in mm!
 (setq Asp (* pi d d 0.25)) ;Speichenquerschnitt
 (setq plotcg 1)
 (setq la1 (sqrt(+ (* a a)(* h h))) lb1 (sqrt(+ (* b b)(* h h)))) ;gespannte Laengen
 (setq la0 (/ la1 (+ 1 (/ Fa1 E Asp))) lb0 (/ lb1 (+ 1 (/ Fb1 E Asp))))
 (setq cspa (/ (* E Asp) la0) cspb (/ (* E Asp) lb0)) ;Speichenaxialsteifigkeit
 (setq farbe_a "1" farbe_b "4" farbe_s "7" farbe_c "3") ;Farben fuer die Lininen
 (setq farbe_ca "6" farbe_cb "2" farbe_cg "5")
 (setq mas_y 0.1 texthoe 1.5)
 (setq xu -60 xo 60 dx 0.5 x xu)
 (setq la2 (sqrt(+ (sqr (+ a x)) (sqr h))) lb2 (sqrt(+ (sqr (- b x)) (sqr h))))
 (setq FAa2 (/ (* cspa (- la2 la0) (+ a x)) la2) FAb2 (/ (* cspb (- lb2 lb0) (- x b)) lb2))
 (setq FA (+ FAa2 FAb2))
 (setq cAa (* cspa (+ 1 (/ (- 0 la0) la2) (/ (* (sqr (+ a x)) la0) (* la2 la2 la2)))))
 (setq cAb (* cspb (+ 1 (/ (- 0 lb0) lb2) (/ (* (sqr (- b x)) lb0) (* lb2 lb2 lb2)))))
 (setq cA (+ cAa cAb))
 (plausibel) ;jetzt schon, weil noetig fuer Gueltigkeitbestimmung cA, cAa, cAb
 (setq n (fix (/ (- xo xu) dx)) yo 0 yu 0 bez 0)
 (if (< x kau) (setq cg cA)
  (if (< x kao) (setq cg cAb)
   (if (< x kbu) (setq cg cA)
    (if (< x kbo) (setq cg cAa) (setq cg cA)))))
 (repeat n
;Werte aus Punkt n-1 speichern
  (setq FAa2v FAa2 FAb2v FAb2 FAv FA cAav cAa cAbv cAb cAv cA cgv cg xv x)
  (setq x (+ x dx))
  (setq la2 (sqrt(+ (sqr (+ a x)) (sqr h))) lb2 (sqrt(+ (sqr (- b x)) (sqr h))))
  (setq FAa2 (/ (* cspa (- la2 la0) (+ a x)) la2) FAb2 (/ (* cspb (- lb2 lb0) (- x b)) lb2))
  (setq FA (+ FAa2 FAb2))
  (setq cAa (* cspa (+ 1 (/ (- 0 la0) la2) (/ (* (sqr (+ a x)) la0) (* la2 la2 la2)))))
  (setq cAb (* cspb (+ 1 (/ (- 0 lb0) lb2) (/ (* (sqr (- b x)) lb0) (* lb2 lb2 lb2)))))
  (setq cA (+ cAa cAb))
  (if (< x kau) (setq cg cA)
   (if (< x kao) (setq cg cAb)
    (if (< x kbu) (setq cg cA) (if (< x kbo) (setq cg cAa) (setq cg cA)))))
  (setvar "cecolor" farbe_a) (command "_line" (list xv (* mas_y FAa2v)) (list x (* mas_y FAa2)) "")
  (setvar "cecolor" farbe_b) (command "_line" (list xv (* mas_y FAb2v)) (list x (* mas_y FAb2)) "")
  (setvar "cecolor" farbe_s) (command "_line" (list xv (* mas_y FAv)) (list x (* mas_y FA)) "")
  (if (= plotcg 0) (progn
   (setvar "cecolor" farbe_c) (command "_line" (list xv (* mas_y cAv)) (list x (* mas_y cA)) "")
   (setvar "cecolor" farbe_ca) (command "_line" (list xv (* mas_y cAav)) (list x (* mas_y cAa)) "")
   (setvar "cecolor" farbe_cb) (command "_line" (list xv (* mas_y cAbv)) (list x (* mas_y cAb)) ""))
   (progn (setvar "cecolor" farbe_cg)
    (command "_line" (list xv (* mas_y cgv)) (list x (* mas_y cg)) "")))
  (if (and (> x (* 0.5 xo)) (= bez 0)) (beschriften))
```

[60] Sobald mehr als 512? Elemente der gleichen Entitätgruppe erstellt werden.

```
  ; Maxima und Minima abfangen
  (if (> FAa2 yo) (setq yo FAa2)) (if (> FAb2 yo) (setq yo FAb2))
  (if (> FA yo) (setq yo FA)) (if (> cA yo) (setq yo FAa2))
  (if (< FAa2 yu) (setq yu FAa2)) (if (< FAb2 yu) (setq yu FAb2))
  (if (< FA yu) (setq yu FA))  (if (< cA yu) (setq yu cA))
 ) ;Ende Plotschleife
 (kokreuz)
 (command "_text" "_j" "_tl" (list xu (* mas_y yo)) texthoe 0 (strcat "a: " (rtos a)))
 (command "_text" "" (strcat "b: " (rtos b)))
 (command "_text" "" (strcat "h: " (rtos h)))
 (command "_text" "" (strcat "d: " (rtos d)))
 (command "_text" "" (strcat "Fa1: " (rtos Fa1)))
 (command "_text" "" (strcat "Fb1: " (rtos Fb1)))

 (setvar "cecolor" cecolor_si)
 (setvar "orthomode" orthomode_si)
 (princ)
) ;Ende Hauptroutine

; Bei Bedarf Koordinatenkreuz zeichnen
(defun kokreuz ()
 ;x-Achse
 (setq x 0 dx 5 dxt 10.0)
 (while (< x (- xo dx))
  (setq x (+ x dx)) (setvar "cecolor" "7") (command "_line" (list x 0) (list x -1) "")
  (if (= (- (/ x dxt) (fix (/ x dxt))) 0)
   (command "_text" "_j" "_tc" (list x -1) texthoe 0 (itoa x)))
 )
 (setq x 0 dx (- 0 dx) dxt (- 0 dxt))
 (while (> x (+ xu dx))
  (setq x (+ x dx)) (setvar "cecolor" "7") (command "_line" (list x 0) (list x -1) "")
  (if (= (- (/ x dxt) (fix (/ x dxt))) 0)
   (command "_text" "_j" "_tc" (list x -1) texthoe 0 (itoa x)))
 )
 (command "_line" (list xu 0) (list xo 0) "")
 ;y-Achse
 (setq y 0 dy 100 dyt 500.0)
 (while (< y (- yo dy))
  (setq y (+ y dy)) (setvar "cecolor" "7")
  (command "_line" (list -1 (* mas_y y)) (list 0 (* mas_y y)) "")
  (if (= (- (/ y dyt) (fix (/ y dyt))) 0)
   (command "_text" "_j" "_mr" (list -1 (* mas_y y)) texthoe 0 (itoa y)))
 )
 (setq y 0 dy (- 0 dy) dyt (- 0 dyt))
 (while (> y (- yu dy))
  (setq y (+ y dy)) (setvar "cecolor" "7")
  (command "_line" (list -1 (* mas_y y)) (list 0 (* mas_y y)) "")
  (if (= (- (/ y dyt) (fix (/ y dyt))) 0)
   (command "_text" "_j" "_mr" (list -1 (* mas_y y)) texthoe 0 (itoa y)))
 )
 (command "_line" (list 0 (* mas_y yu)) (list 0 (* mas_y yo)) "")
)
;Kurven bezeichnen
(defun beschriften ()
 (setq bez 1)
 (setvar "cecolor" farbe_a) (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y FAa2)) texthoe 0 "FAa2")
 (setvar "cecolor" farbe_b) (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y FAb2)) texthoe 0 "FAb2")
 (setvar "cecolor" farbe_s) (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y FA)) texthoe 0 "FA")
 (if (= plotcg 0)
  (progn (setvar "cecolor" farbe_c)
   (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y cA)) texthoe 0 "cA")
   (setvar "cecolor" farbe_c) (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y c)) texthoe 0 "c")
   (setvar "cecolor" farbe_ca) (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y cAa)) texthoe 0 "cAa")
   (setvar "cecolor" farbe_cb) (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y cAb)) texthoe 0 "cAb"))
   (progn (setvar "cecolor" farbe_cg)
```

```
    (command "_text" "_j" "_bl" (list x (* mas_y cg)) texthoe 0 "cg")))
)
(defun plausibel ()
 (setq au (- (- 0 a) (sqrt (- (sqr (+ la0 BruchDehn)) (sqr h))))) ;linke Speiche reiszt
 (setq ao (+ (- 0 a) (sqrt (- (sqr (+ la0 BruchDehn)) (sqr h))))) ;linke Speiche reiszt
 (setq bu (- b (sqrt (- (sqr (+ lb0 BruchDehn)) (sqr h))))) ;rechte Speiche reiszt
 (setq bo (+ b (sqrt (- (sqr (+ lb0 BruchDehn)) (sqr h))))) ;rechte Speiche reiszt
 (setvar "cecolor" "2")
 (command "_line" (list au 10)(list ao 10) "" "_text" "_j" "_br"
  (list ao 10) texthoe 0 "linke Speiche heil")
 (setvar "cecolor" "5")
 (command "_line" (list bu 20) (list bo 20) "" "_text" "_j" "_bl"
  (list bu 20) texthoe 0 "rechte Speiche heil")
 (setq kau (- (- 0 a) (sqrt (- (sqr la0) (sqr h))))) ;linke Speiche knickt
 (setq kao (+ (- 0 a) (sqrt (- (sqr la0) (sqr h))))) ;linke Speiche knickt
 (setq kbu (- b (sqrt (- (sqr lb0) (sqr h))))) ;rechte Speiche knickt
 (setq kbo (+ b (sqrt (- (sqr lb0) (sqr h))))) ;rechte Speiche knickt
 (setvar "cecolor" "2")
 (command "_line" (list kau 5)(list kao 5) "" "_text" "_j" "_br"
  (list kao 5) texthoe 0 "linke Speiche knickt")
 (setvar "cecolor" "5")
 (command "_line" (list kbu 15) (list kbo 15) "" "_text" "_j" "_bl"
  (list kbu 15) texthoe 0 "rechte Speiche knickt")
)
;Quadrieren
(defun sqr (x) (* x x))
;gesamten Bereich l"oschen
(defun c:loal () (command "_erase" "_cr" (getvar "extmax") (getvar "extmin") ""))
```

# Literatur


[1] Bäumel, A.; Seeger, T.: Materials Data for cyclic Loading, Suplement 1, Elevsier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, 1990, *TU-HH: 2494-003*

[2] Beitz, W.; Küttner, K.-H.: Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987, 16. Auflage

[3] Biezeno, C. B.; Grammel, R.: Technische Dynamik, Springer Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953, 2. Auflage, *TU-HH: MSD-631*

[4] Brandt, Jobst: Das Fahrrad-Rad, Avocet, Palo Alto, California, USA, 1995, ISBN 0-9607236-4-1

[5] Bürgermeister, Gustav ; Steup, Herbert ; Kretzschmar, Horst: Stabilitätstheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1966

[6] Czichos, Horst: HÜTTE, Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, Akademischer Verein Hütte e.V., Springer Verlag, Berlin, 1996, 30. Auflage, *TU-HH: MSB-101*

[7] Domes, Theodor: Spezielle rechnerische Grundlagen für Leichtmetallandwendungen im Schiffbau, Jahrburg der STG, Bd. 46, Springer Verlag Berlin/Heidelberg, 1953

[8] Franke, Hermann: dtv-Lexikon der Physik, Band 6

[9] Hencky, H.: Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 1, Heft 6

[10] Federau, M.: Hybrid Laufräder, ProVelo, Nr. 7, Jüchen, Dez. 1986

[11] Göbel, G.; Gräßner, H.; Keller, T.; Rösler, T.; Trippel, S.; Vetter, J.: Laborversuch Maschinendynamik der Turbinenschaufel, Bibliothek des Arbeitsbereiches Meerestechnik II, Wintersemester 1988/89

[12] Goldberg, J. E.; Bogdanoff, J.L. : Proc. ASCE 90, ST4, 1964, S. 235, *Hencky unter Vorspannung*

[13] Klumpp, Allan: Designing exotic bicycle wheels for superior strength, Human Power The technical journal of the IHPVA, Spring-Summer 1993

[14] Leipolz, Horst: Einführung in die Elastizitätstheorie, G. Braun, Karlsruhe, 1968

[15] Magnus, K. ; Müller, H. H.: Grundlagen der technischen Mechanik, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1987, 5. Auflage

[16] Matek, W.; Muhs, D.; Wittel, H.: Roloff/Matek Maschinenelemente, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1987, 11. Auflage

[17] Meirovitch, Leonard: Analytical Methods in vibrations, Collier-Macmillan Canada, Toronto,1967 *TU-HH: MSD-626*

[18] Tour, das Radmagazin, Globus-Verlag GmbH, München, Okt. 1986

[19] Osten-Sacken, E. v. .d; Kramp, P.: Qualitätslaufräder - ein Fertigungsproblem, Pro Velo, **Nr. 18**, Jüchen, Sept. 1989

[20] Pestel, E.; Wittenburg, J.: Technische Mechanik, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim-Leipzig,Wien-Zürich, 1992, Band 2, *TU-HH: MSD-424*

[21] Pflüger, Alf: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1975, 3. Auflage, *TU-HH: MSD-468*

[22] Roik, K.: Vorlesungen über Stahlbau, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, 1983, 2. Auflage *TU-HH: BAD-317*

[23] Roik, K.; Carl, J.; Lindner, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, 1972 *TU-HH: 2436-610*

[24] Winkler, Fritz: Fahrradtechnik, Bielefelder Verlagsanstalt, Bielefeld, 1991, 7. Auflage

[25] Wolter, S.; Osten-Sacken, E. v .d.: Speichenspannungsanalyse — Grundlage jeder Qualitätskontrolle im Laufradbau, Pro Velo, **Nr. 19**, Jüchen, Dez. 1989

[26] Würtemberger, G.: Tabellenbuch Metall, Verlag Europa-Lehrmittel, Wuppertal, 1985, 35. Auflage

[27] Szabó, I.: Höhere Technische Mechanik, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 5. Auflage, 2. Nachdruck, 1985 *TU-HH: MSD-445*

[28] Zierke, H.-J.: Qualitätslaufräder - so fertigt sie der Handwerker, Pro Velo, **Nr. 19**, Jüchen, Dez. 1989

[29] Zierke, H.-J.: Leicht und bärenstark, aktiv Radfahren Extra, Bielefelder Verlagsanstalt, **3/1993**

[30] Zimmermann, H.: Der gerade Stab mit stetiger elastischer Stützung und beliebig gerichteten Einzellasten, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss, S. 898, Berlin, 1905. Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Berlin 1906

# Index